Анализ-2 НМУ, февраль-май 2025 гг.

Листок №10

1) для уравнения $\dot{x} = v(x,t)$ введём "уравнение в вариациях" , полученное дифференцированием исходного: $\dot{y} = v'_x y$. Убедиться, что для него выполняются условия теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости;

2) приближения Пикара для решений уравнения в вариациях с начальным условием $\psi(x_0, t_0) = E$ (E – единичная матрица), имеют вид

$$\psi_{n+1}(x,t) = E + \int_{t_0}^{t} v'_x(\phi_n(x,\tau),\tau)\psi_n(x,\tau)d\tau,$$

где ϕ_n – приближения Пикара для решений исходного уравнения;

3) доказать, что $\psi_n = (\phi_n)'_x$;

4) доказать, что Пикаровские приближения ψ_n и ϕ_n равномерно сходятся. Вывести отсюда теорему о непрерывной дифференцируемости решения по начальным условиям.

5) дано линейное уравнение первого порядка $y' + p(x)y + q(x) = 0$.

Доказать, что общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y = Ce^{-\int p(x)dx}$, $C = const$;

Доказать, что общее решение исходного уравнения имеет вид $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, где $C(x)$ – уже функция (метод вариации постоянных).

6) Дано уравнение с постоянными коэффициентами $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ (все $a_i = const$). Доказать, что его общее решение имеет вид $y = C_1 e^{r_1 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$, где $r_1, \ldots, r_n$ – корни полинома $a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n$, в том случае, когда эти корни попарно различны.

План лекции №10. Обыкновенные дифференциальные уравнения: основные теоремы.

Теоремы о существовании, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий решений ОДУ. Теорема о непрерывной дифференцируемости решений по начальным условиям.