

ТОПОЛОГИЯ–2

ЛИСТОЧЕК 3: ОСНОВЫ ГОМОЛОГИЙ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Проверьте равенство $\partial^2 = 0$ для дифференциала $\partial = \partial_0 - \partial_1 + \dots + (-1)^n \partial_n$.

2. Для короткой точной последовательности цепных комплексов

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$$

рассмотрим цикл $c \in C_n$. Так как j — сюръективно, $c = j(b)$. Так как $\partial_C(c) = 0$, $j\partial_B(b) = \partial_C(j(b)) = \partial_C(c) = 0$. Следовательно, из точности, $\partial_B(b) = i(a)$. Проверьте, что $a \in A_{n-1}$ — цикл, и описанная процедура однозначно и корректно определяет гомоморфизм $\partial: H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$, $[c] \mapsto [i^{-1}\partial_B j^{-1}(c)]$. Докажите, что получающаяся последовательность гомологий

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

точна.

3. а) Для пространства X рассмотрим *аугментированный цепной комплекс* $\tilde{C}(X) = \dots \rightarrow C_n(X) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(X) \rightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$, отличающийся от комплекса сингулярных цепей лишь в размерности -1 , в которой $\varepsilon(\sum k_i \sigma_i) = \sum k_i$ для нульмерных сингулярных симплексов σ_i . Постройте естественный по X морфизм цепных комплексов $\tilde{C}(X) \rightarrow C(X, x_0)$, индуцирующий изоморфизм на гомологиях.

б)* Постройте естественный по X морфизм цепных комплексов $\tilde{C}_*(X) \rightarrow \tilde{C}_{*+1}(\Sigma X)$, индуцирующий изоморфизм надстройки на гомологиях.

4. Рассмотрим сингулярный симплекс $p_n: \Delta^n \rightarrow S^n$, стягивающий границу $\partial\Delta^n$ в точку. Является ли он образующей гомологий $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$? Если нет, как это можно исправить?

5. Докажите, что для любой тройки $B \subset A \subset X$ имеет место длинная точная последовательность гомологий

$$\dots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

где $\partial: H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(A, B)$.

В частности, получаем длинную точную последовательность пары для приведённых гомологий.

6. Докажите, что отношение $\sim$ цепной эквивалентности между морфизмами цепных комплексов обладает следующими свойствами:

- (1) это отношение эквивалентности;
- (2) оно уважает сложение, то есть, $f \sim f'$ и $g \sim g' \Rightarrow f + g \sim f' + g'$;
- (3) оно уважает композицию, то есть, $f \sim f'$ и $g \sim g' \Rightarrow fg \sim f'g'$.

7. Для цепного комплекса (конечной длины) векторных пространств (конечномерных) над полем $\mathbb{k}$

$$0 \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

рассмотрим знакопеременную сумму $\chi(C) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{k}}(C_i)$. Докажите, что $\chi(C) = \chi(H(C)) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{k}}(H_i(C))$. Верно ли это для конечных комплексов из конечно порождённых абелевых групп, если заменить размерность на ранг (где $\text{rk}(\mathbb{Z}^n \oplus \text{кручение}) = n$)?

8. Вычислите симплициальные гомологии для следующих Δ -комплексов:

- а) окружности S^1 с n вершинами и n рёбрами (« n -угольник»);
- б) какой-нибудь структуры Δ -комплекса на (двумерном) торе и проективной плоскости;

- в) симплекс Δ^2 с отождествлением трёх его вершин в одну точку;
- г) S^n с двумя симплексами Δ^n , склеенными по границе;
- д)* для какой-нибудь структуры Δ -комплекса на $\mathbb{R}P^n$.

9. Вычислите гомологии следующих пространств:

- а) трёхмерного тора $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$;
- б) произвольной замкнутой поверхности (ориентируемой или нет);
- в) факторпространства $\mathbb{R}P^n / \mathbb{R}P^k$ для $k < n$;
- г) пространства $S^1 \times (S^1 \vee S^1)$;
- д)* факторпространства S^3 / C_3 , где циклическая группа C_3 из трёх элементов действует на единичной сфере $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^3$ посредством умножения обеих координат z_k на $e^{\frac{2\pi i}{3}}$;
- е)* факторпространства $S^n / \sim$, где отношение эквивалентности склеивает *антиподальные* точки x и $-x$ на экваториальной подсфере $S^{n-1} \subset S^n$.

10. а) Покажите, что гомотопные отображения пар $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ индуцируют одинаковые отображения в гомологиях $f_*, g_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$. В частности, гомотопические эквивалентности пар индуцируют изоморфизмы на относительных гомологиях.

б) Докажите, что вложение $(D^n, S^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ индуцирует изоморфизм относительных групп гомологий, но при этом не является гомотопической эквивалентностью пар.

Проверьте, что вообще, если пары (X, A) и (Y, B) гомотопически эквивалентны, то и $(X, \bar{A})$ и $(Y, \bar{B})$ — тоже.

11. а) Докажите, что вложение $A \hookrightarrow X$ ретракта индуцирует вложение прямого слагаемого на группах гомологий. Верно ли это для гомотопических групп?

б) Докажите, что если в клеточной паре (X, A) размерности всех клеток в $X - A$ не превосходят n , то отображение $H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ является вложением прямого слагаемого.

в) Докажите, что если вложение $A \hookrightarrow X$ гомотопно нулю, то $H_n(X, A) \cong H_n(X) \oplus H_{n-1}(A)$, причём вложение первого слагаемого индуцировано вложением $X \hookrightarrow (X, A)$, а проекция на второе слагаемое совпадает с граничным отображением в последовательности пары (X, A) .

12. а) Рассмотрим призму $\Delta^n \times I$ с вершинами $v_0, \dots, v_n$ на нижнем основании и $w_0, \dots, w_n$ — на верхнем (w_i — над v_i). Докажите, что симплексы $[v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ образуют триангуляцию призмы.

б)* Постройте аналогичную триангуляцию произведения симплексов $\Delta^n \times \Delta^k$.

13. а) Проверьте, что для симплекса Δ^n вершинами симплексов его барицентрического подразделения служат в точности последовательности барицентров цепочек вложенных граней $\Delta^n \supset \Delta_{i_1}^{n-1} \supset \Delta_{i_1, i_2}^{n-2} \supset \dots \supset \Delta_{i_1, \dots, i_{n-1}}^1 \supset \Delta_{i_1, \dots, i_n}^0$.

б) Докажите, что для симплекса Δ^n с барицентрическими координатами $t_0, \dots, t_n$ симплексы барицентрического подразделения выделяются условием $t_{\sigma(0)} \leq \dots \leq t_{\sigma(n)}$ для перестановок $\sigma \in \Sigma_{n+1}$.

в) Докажите, что для любого симплекса σ^n барицентрического подразделения симплекса Δ^n выполнено $\text{diam } \sigma^n \leq \frac{n}{n+1} \text{diam } \Delta^n$.

г)* Проверьте, что в барицентрическом подразбиении любого Δ -комплекса у каждого симплекса все вершины различны.

Докажите, что если в Δ -комплексе у каждого симплекса все вершины различны, то его барицентрическое подразбиение является симплициальным комплексом.

В частности, для любого Δ -комплекса его второе барицентрическое подразбиение является симплициальным комплексом.

14. а) Докажите, что факторизация 1-остова $T^2 \rightarrow S^2$ индуцирует изоморфизм на вторых гомологиях. В частности, это отображение не гомотопно нулю. Существуют ли не гомотопные нулю отображения $S^2 \rightarrow T^2$?

б) Рассмотрим расслоение Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$ и стягивание 2-остова трёхмерного тора в точку $T^3 \rightarrow S^3$. Докажите, что композиция $T^3 \rightarrow S^2$ индуцирует нулевое отображение на всех гомотопических группах и группах гомологий, но само не гомотопно нулю.

в) Постройте отображение $S^1 \vee S^1 \vee S^2 \rightarrow T^2$, индуцирующее изоморфизм на всех группах гомологий, но не являющееся гомотопической эквивалентностью.

15. Докажите, что слабая эквивалентность $f: X \rightarrow Y$ индуцирует изоморфизмы $f_*: H_i(X) \rightarrow H_i(Y) \forall i \geq 0$.

16. Докажите, что $H_i(X \times S^n) \cong H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$, причём проекция $X \times S^n \rightarrow X$ индуцирует в гомологиях проекцию на первое слагаемое (здесь считается, что $H_{i<0}(X) = 0$).

17. а) Докажите, что для конечных клеточных пространств $\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$.

б) Докажите, что для n -листного накрытия $X \rightarrow Y$ между клеточными пространствами $\chi(Y) = n \cdot \chi(X)$.

в)* Докажите, что для локально тривиального расслоения $X \rightarrow Y$ между конечными клеточными пространствами, для которого слой F гомотопически эквивалентен конечному клеточному комплексу, выполнено $\chi(Y) = \chi(F) \cdot \chi(X)$.

На самом деле это верно и для расслоений Серра.

18. Если обозначить через M_g ориентированную замкнутую поверхность рода g , найдите необходимые и достаточные условия на g, g' , при которых существует накрытие $M_{g'} \rightarrow M_g$.

19. Для перестановки $\sigma \in \Sigma_{n+1}$ рассмотрим соответствующее аффинное преобразование $\sigma: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$, индуцированное перестановкой вершин симплекса. Тогда для любого сингулярного симплекса $\varphi: \Delta^n \rightarrow X$ определён другой сингулярный симплекс $\sigma(\varphi) = \varphi \circ \sigma$, что даёт гомоморфизм $\sigma_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$. Докажите, что если $x \in C_n(X)$ — цикл, то $\sigma_\#(x)$ — тоже цикл, и более того, разность циклов $\text{sgn}(\sigma)x$ и $\sigma_\#(x)$ является границей (то есть, принадлежит $\text{im } \partial \subset C_n(X)$).

20.* а) Докажите, что структура Δ -комплекса является частным случаем структуры клеточного пространства (в частности, что Δ -комплекс всегда автоматически хаусдорфов).

б) Убедитесь, что для Δ -комплекса X его симплициальный цепной комплекс $(C_*^\Delta(X), \partial)$ изоморфен его клеточному цепному комплексу $(C_*^{CW}(X), \partial^{CW})$.

21.* а) Приведите пример замкнутого подмножества $A \subset X$ такого, что группы $H_*(X, A)$ не изоморфны $\tilde{H}_*(X/A)$.

б) Приведите пример объединения $X = A \cup B$, для которой не имеет места точная последовательность Майера–Вьеториса.

22.* Докажите, что минимальное количество вершин для симплициальной триангуляции тора равно 7, а проективной плоскости — 6.

23. а) Докажите, что морфизм цепных комплексов векторных пространств (над каким-то полем) является гомотопической эквивалентностью $\iff$ он является *квазиизоморфизмом*, то есть, индуцирует изоморфизм на всех векторных пространствах гомологий. Выведите, что любой цепной комплекс (C_*, ∂) векторных пространств гомотопически эквивалентен цепному комплексу $(H_*(C), 0)$ (с нулевыми дифференциалами).

б) Приведите пример морфизма цепных комплексов абелевых групп, который является квазиизоморфизмом, но не является гомотопической эквивалентностью.

в) Докажите, что морфизм цепных комплексов свободных абелевых групп является гомотопической эквивалентностью $\iff$ он является квазиизоморфизмом. Верно ли, что любой цепной комплекс (C_*, ∂) свободных абелевых групп гомотопически эквивалентен цепному комплексу $(H_*(C), 0)$ (с нулевыми дифференциалами).

24. а) Для морфизма цепных комплексов $f: (C_*, \partial_C) \rightarrow (U_*, \partial_U)$ рассмотрим абелевы группы $\text{Cone}(f)_i = C_{i-1} \oplus U_i$ и гомоморфизмы $\partial_{\text{Cone}(f)}: \text{Cone}(f)_i \rightarrow \text{Cone}(f)_{i-1}$

$$\partial_{\text{Cone}(f)}(c, u) = (-\partial_C c, \partial_U u + f(c))$$

Проверьте, что $(Cone(f), \partial_{Cone(f)})$ является цепным комплексом и докажите, что он включается в короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow U \rightarrow Cone(f) \rightarrow \Sigma C \rightarrow 0,$$

где ΣC — цепной комплекс с группами $(\Sigma C)_i = C_{i-1}$ и дифференциалом $\partial_{\Sigma C} = -\partial_C$, причём в соответствующей длинной точной последовательности гомологий связывающие гомоморфизмы $\partial: H_{i+1}(\Sigma C) = H_i(C) \rightarrow H_i(U)$ совпадают с индуцированными гомоморфизмами $f_*: H_i(C) \rightarrow H_i(U)$.

Выведите, что морфизм f является квазиизоморфизмом $\iff$ цепной комплекс $Cone(f)$ *ациклический*, то есть, все группы гомологий $H_i(Cone(f))$ равны нулю.

б)* Докажите, что морфизм f является гомотопической эквивалентностью $\iff$ цепной комплекс $Cone(f)$ *стягиваемый*, то есть, гомотопически эквивалентен нулевому цепному комплексу.

25. а) Выведите точную последовательность Майера–Виеториса для приведённых гомологий. Что происходит, если $A \cap B = \emptyset$?

б)* Пусть $A, B \subset Y$, $Y = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$, и кроме того, $Y \supset X \supset C, D$, $X = \text{Int}(C) \cup \text{Int}(D)$, причём $C \subset A$ и $D \subset B$. Обозначим $i_{AC}: (A \cap B, C \cap D) \hookrightarrow (A, C)$, $i_{BD}: (A \cap B, C \cap D) \hookrightarrow (B, D)$, $j_{AC}: (A, C) \hookrightarrow (Y, X)$, $j_{BD}: (B, D) \hookrightarrow (Y, X)$. Докажите, что имеет место естественная длинная точная последовательность (*относительная последовательность Майера–Виеториса*)

$$\dots \rightarrow H_n(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{(i_{AC})_* \oplus (i_{BD})_*} H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \xrightarrow{(j_{AC})_* - (j_{BD})_*} H_n(Y, X) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A \cap B, C \cap D) \rightarrow \dots$$

26. Обозначим $d_i^n: \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$ — вложение i -ой гиперграни, $s_i^n: \Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{n-1}$ — аффинная проекция, заданная на вершинах $s_i^n(v_j) = \begin{cases} w_j, & j \leq i \\ w_{j-1}, & j > i \end{cases}$ (здесь $v_0, \dots, v_n$ — вершины Δ^n и $w_0, \dots, w_{n-1}$ — вершины Δ^{n-1}).

Для топологического пространства X рассмотрим множества сингулярных симплексов $\text{Sing}^n(X) = \{\sigma: \Delta^n \rightarrow X\}$ с индуцированными отображениями $(d_i^n)^*: \text{Sing}^n(X) \rightarrow \text{Sing}^{n-1}(X)$ и $(s_i^n)^*: \text{Sing}^{n-1}(X) \rightarrow \text{Sing}^n(X)$.

Определим топологические пространства

$$|\text{Sing}(X)| = \left(\bigsqcup_{n \geq 0} \Delta^n \times \text{Sing}^n(X) \right) / ((s_i^n(x), \sigma) \sim (x, (s_i^n)^* \sigma), (d_i^n(x), \sigma) \sim (x, (d_i^n)^* \sigma))$$

и

$$\|\text{Sing}(X)\| = \left(\bigsqcup_{n \geq 0} \Delta^n \times \text{Sing}^n(X) \right) / ((d_i^n(x), \sigma) \sim (x, (d_i^n)^* \sigma))$$

а) Проверьте, что $|\text{Sing}(X)|$ обладает естественной структурой симплициального комплекса и его цепной комплекс $(C_*^\Delta(|\text{Sing}(X)|), \partial)$ изоморфен сингулярному комплексу $(C_*(X), \partial)$.

б) Сингулярные симплексы из объединения образов $\bigcup_{i=0}^n \text{im}(s_i^n)^* \subset \text{Sing}^n(X)$ называются *вырожденными*. Обозначим порождённую ими свободную абелеву группу $C_n^{\text{deg}}(X)$. Проверьте, что $C_*^{\text{deg}}(X) \subset C_*(X)$ — цепной подкомплекс. Факторкомплекс $C_*^N(X) = C_*(X) / C_*^{\text{deg}}(X)$ называется *нормализованным сингулярным комплексом*. Докажите, что комплекс $C_*^{\text{deg}}(X)$ имеет нулевые гомологии, и следовательно, проекция $C_*(X) \twoheadrightarrow C_*^N(X)$ индуцирует изоморфизм на гомологиях.

в)* Проверьте, что $\|\text{Sing}(X)\|$ обладает естественной структурой Δ -комплекса и его цепной комплекс $(C_*^\Delta(\|\text{Sing}(X)\|), \partial)$ изоморфен нормализованному сингулярному комплексу $(C_*^N(X), \partial)$.

г)* Проверьте, что естественные отображения $\Delta^n \times \text{Sing}^n(X) \rightarrow X$, $(x, \sigma) \mapsto \sigma(x)$ индуцируют коммутативную диаграмму непрерывных отображений

$$\begin{array}{ccc}
\|\mathrm{Sing}(X)\| & \xrightarrow{p} & |\mathrm{Sing}(X)| \\
& \searrow f & \downarrow g \\
& & X
\end{array} \quad (\text{здесь } p \text{ — естественная проекция}).$$

Докажите, что все отображения в этой диаграмме являются слабыми эквивалентностями. В частности, это даёт явную конструкцию строго функториальной CW -аппроксимации пространств.

27.* Рассмотрим множество сингулярных кубов $\mathrm{Sing}_{\square}^n(X) = \{\kappa: I^n \rightarrow X\}$ и порождённую им свободную абелеву группу $C_n^{\square}(X)$. Для $i = 1, \dots, n$ и $\varepsilon = 0, 1$ мы имеем вложения гиперграней $f_{\varepsilon,i}^n: I^{i-1} \times \{\varepsilon\} \times I^{n-i-1} \hookrightarrow I^n$ и индуцированные ими $(f_{\varepsilon,i}^n)^*: \mathrm{Sing}_{\square}^n(X) \rightarrow \mathrm{Sing}_{\square}^{n-1}(X)$.

Определим $\partial^{\square}: C_n^{\square}(X) \rightarrow C_{n-1}^{\square}(X)$ по формуле

$$\partial(\kappa) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} ((f_{1,i}^n)^*(\kappa) - (f_{0,i}^n)^*(\kappa))$$

Убедитесь, что (эта формула действительно задаёт ориентированную границу куба и) выполнено равенство $(\partial^{\square})^2 = 0$. Мы получаем *сингулярный кубический комплекс* пространства X .

Вычислите гомологии этого комплекса для $X = \mathrm{pt}$ и убедитесь, что они не равны нулю в старших размерностях.

Чтобы это исправить, аналогично пункту б) задачи 26 рассмотрим проекции $\pi_i^n: I^n \rightarrow I^{n-1}$ (вдоль i -ой координаты), индуцированные ими отображения $(\pi_i^n)^*: \mathrm{Sing}_{\square}^{n-1}(X) \rightarrow \mathrm{Sing}_{\square}^n(X)$ и группу $C_n^{\square, \deg}(X)$, порождённую *вырожденными кубами* $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{im}(\pi_i^n)_* \subset \mathrm{Sing}_{\square}^n(X)$. Проверьте, что мы получаем цепной подкомплекс и определим *кубические сингулярные гомологии* $H_*^{\square}(X)$ как гомологии факторкомплекса $C_*^{\square, N}(X) = C_*^{\square}(X)/C_*^{\square, \deg}(X)$.

Докажите, что $H_*^{\square}(X)$ удовлетворяют всем тем же свойствам, что и $H_*(X)$: функториальность, гомотопическая инвариантность, длинная точная последовательность пары, изоморфизм вырезания, правильные гомологии точки и т.п.

Докажите, что на самом деле имеет место естественный изоморфизм $H_*^{\square}(X) \xrightarrow{\cong} H_*(X)$.