Листок 9

Задача 9.1. Пусть $k = n/2 + t$, где $t = o(n^{2/3})$. Докажите, что

$$\binom{n}{k} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} 2^n e^{-2t^2/n}.$$

Какое соотношение получится из равенства

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

если заменить каждое слагаемое на его асимптотику?

Задача 9.2. Докажите формулу удвоения для гамма-функции:

$$\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = \sqrt{\pi} 2^{1-2s} \Gamma(2s).$$

Задача 9.3. Положим для вещественных x

$$\varphi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x$$

а) Докажите, что $\varphi(x+1) = \varphi(x)$ и φ — гладкая функция на $\mathbb{R}$.
б) Пусть $g(x) = (\ln \varphi(x))''$. Докажите, что g непрерывна и удовлетворяет соотношению

$$\frac{g(x) + g(x+1/2)}{4} = g(2x).$$

в) Докажите формулу отражения

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Задача 9.4. а) Докажите, что

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

б) Найдите $\zeta(2)$ и $\zeta(4)$.
в*) Докажите, что для натуральных k выполнено

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}$$

Задача 9.5. Пусть $sf(n) = 1!2! \dots n!$ — суперфакториал. Докажите, что существуют многочлены $p(n), q(n)$ такие, что при $n \to +\infty$ выполнено

$$\ln sf(n) \sim p(n) \ln n + q(n)$$

и найдите многочлены p, q явно, кроме свободного члена q.

Задача 9.6. Пусть $D_N(x)$ — ядро Дирихле, то есть

$$D_N(x) = \sum_{|k|\leq N} e^{2\pi ikx}.$$

Каков порядок роста

$$||D_N||_{L^1} = \int_0^1 |D_N(x)|dx?$$

Задача 9.7. Пусть $B_k(x)$ — многочлен Бернулли.
а) Найдите разложение Фурье для $P_k(x) = B_k(\{x\})$, где $\{x\}$ — дробная часть x.
б) Найдите

$$\int_0^1 B_k(x)^2 dx.$$

Задача 9.8*. Пусть $C([0,1])$ — непрерывные функции на отрезке $[0,1]$. $C([0,1])$ образует алгебру относительно поточечного умножения и сложения функций. Опишите все максимальные идеалы этой алгебры.