

МНОГОЧЛЕНЫ И КОНЕЧНЫЕ ПОЛЯ.

Задача 1.

Найдите обратный к $f(x)$ в кольце вычетов $\mathbb{k}[x]/(g(x))$, если такой существует.

- а)** $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, $f(x) = x^6 + x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$;
б) $\mathbb{k} = \mathbb{F}_2$, $f(x) = x^7 + 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$.

Задача 2. а) Пусть $\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1)$ — поле из четырёх элементов, которые мы обозначим $\{0, 1, [\alpha], [\alpha + 1]\}$. Найдите все делители нуля и все обратимые элементы (и обратные к ним) в кольце $\mathbb{F}_4[x]/(x^2 + [\alpha + 1]x + [\alpha])$.

б) Постройте явно изоморфизм полей $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + x + 2)$ и $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$.

Задача 3. Классифицируйте кольца вида $\mathbb{R}[x]/(ax^2 + bx + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ с точностью до изоморфизма.

Задача 4. а) Докажите, что число $32858969712941053630927296788431704044342041015625 = 5^{31}13^{25}$ является суммой двух квадратов целых чисел. **б)** Решите в комплексных числах уравнение $z^2 -$

$(3 - i)z + 4 - 3i = 0$. **в)** Вычислите $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$. **г)** Докажите, что комплексные точки a, b, c, d лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда их *двойное отношение* $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ является вещественным числом.

Задача 5. а) Найдите все решения в $\mathbb{C}$ уравнения $z^n = 1$, $a \in \mathbb{C}$. Докажите, что они образуют группу μ_n .

б) Докажите, что группа μ_n — циклическая (порождена одним элементом). Образующая этой группы называется первообразным корнем. Найдите количество первообразных корней.

в) Пусть $\Phi_n(x) = \prod (x - z_i)$, где z_i пробегает все первообразные корни степени n . Докажите, что

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

г) Докажите, что $\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^{n/d} - 1)^{\mu(d)}$, где μ — функция Мёбиуса. Сделайте вывод, что $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

д*) Докажите, что $\Phi_n(x)$ — неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.

е*) Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $kn + 1$, где $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ фиксировано.

Задача 6. а) Пусть $\mathbb{k}$ — поле. Докажите, что группа $\mu_n(\mathbb{k}) := \{x \in \mathbb{k} \mid x^n = 1\}$ — циклическая. Приведите пример, когда $|\mu_n(\mathbb{k})| < n$.

б*) Может ли группа обратимых элементов бесконечного поля быть циклической?

Задача 7. Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле. **а)** Докажите, что любая функция $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ является многочленом. Приведите пример двух различных ненулевых многочленов, задающих одинаковую функцию.

б*) Докажите, что любая функция $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ является многочленом.