Циклические гомологии и их приложения. Листок 1

Часть I. Введение в гомологическую алгебру

Определение 1. *Модуль P называетая проективным, если*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\forall\pi"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists f'"] \arrow[r, "\forall f"'] & M \end{tikzcd}$$

Задача 1. *Доказать, что модуль P проективный $\iff$ $\exists$ свободный F, что $F = P \oplus P'$ для некоторого P' $\iff$ $\forall\ f : T \twoheadrightarrow P\ \exists h : P \to T$, что $fh = id_P$.*

Задача 2 (Лемма о пяти гомоморфизмах). *Пусть дана коммутативная диаграмма с точными строками:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_3}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_4}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_5}\downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5 \end{array}$$

Если α_1 сюръективен, α_2 и α_4 биективны, а α_5 инъективен, то α_3 также биективен.

Задача 3. *Найти формулировки леммы о змее, зиг-заг леммы и 3×3 леммы. Доказать их.*

Задача 4 (Для тех, кто знает спектралки). *Сделать предыдущую задачу с помощью спектральной последовательности бикомплекса.*

Задача 5 (Лемма о расщеплении). *Доказать,что для короткой точной последовательности модулей:*

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

следующие условия эквивалентны:

1. *Существует расщепление $r : B \to A$ с $r \circ i = id_A$*
2. *Существует расщепление $s : C \to B$ с $p \circ s = id_C$*
3. *$B \cong A \oplus C$*

Задача 6. *Доказать, что любой модуль над кольцом R имеет проективную резольвенту.*

Задача 7. *Пусть $K_.(x_1, x_2, ..., x_n)$ – комплекс Кошуля на n элементах кольца R. То есть*

$$K_.(x_1, x_2, ..., x_n) := 0 \to \bigwedge^n R^n \to \bigwedge^{n-1} R^n \to \cdots \to \bigwedge^1 R^n \to R \to 0$$

с дифференциалом

$$d(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}) = \sum_{1 \le p \le s} (-1)^{p+1} x_{i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_p}} \wedge \cdots \wedge e_{i_1}$$

Доказать, что d , действительно, дифференциал. Для модуля M комплекс Кошуля определяется как $K_.(x_1, x_2, ..., x_n) \otimes_R M$

Часть II. Гомологии Хохшильда

Задача 8. *Проверить тождество $b^2 = 0$, b – дифференциал Хохшильда.*

Задача 9. *Пусть $A = k[x]/(x^2)$ — алгебра над полем k. Вычислите гомологии Хохшильда $HH_0(A)$ и $HH_1(A)$, используя бар-резольвенту.*

Задача 10. *Докажите, что для любой ассоциативной алгебры A над полем k выполняется:*

$$HH_0(A) \cong A/[A, A],$$

где $[A, A]$ — коммутант алгебры.

Задача 11. *Пусть $A = M_n(k)$ — алгебра матриц размера $n \times n$ над полем k. Покажите, что $HH_m(A) = 0$ для всех $m > 0$.*

Задача 12. *Доказать, что*

$$I/I^2 \cong \Omega^1_{A|k}$$

Где I – ядро умножения $\mu : A \otimes A \to A$, порожденное элементом $1 \otimes x - x \otimes 1$ как $A-$модуль. $\Omega^1_{A|k}$– Кэлеровы дифференциалы алгебры A

Задача 13. *Доказать, что первые гомологии Хохшильда некоторой алгебры A изоморфны бимодулю «универсальных Кэлеровых дифференциалов» ,то есть бимодулю $\Omega(A)$, порожденному элементами вида: adb , a, $b \in A$, где $d : A \to \Omega(A)$ такое, что*

$$d(ab) = adb + bda \tag{1}$$

Задача 14 (Морита-эквивалентность)**.** *Пусть $B = Mat_n(A)$, доказать, что $Tr : B \otimes B^{\otimes n} \to A \otimes A^{\otimes n}$, определяемое следующим образом*

$$Tr(B^0 \otimes B^1 \otimes \cdots \otimes B^n) = \sum_{i_1, i_2, ..., i_n} B^0_{i_0 i_1} \otimes B^1_{i_1 i_2} \otimes \cdots \otimes B^n_{i_n i_0}$$

индуцирует цепное отображение между соотвествующими комплексами Хохшильда.

Задача 15. *Пусть P – проективный модуль над алгеброй A. Доказать, что гомологии Хохшильда $End(P)$ изоморфны гомологиям Хохшильда A, то есть «гомологии эндоморфизмов расслоения изоморфны гомологиям алгебры функций базы расслоения» на топологическом языке.*