Евклидовы пространства I

Задача 3.1. Докажите, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ существует единственное скалярное произведение, для которого выполнено соотношение $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{v}|^2$ — квадрат длины вектора $\boldsymbol{v}$.

Задача 3.2. Докажите, что для любых линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ евклидова пространства найдётся такой вектор $\boldsymbol{b}$, что $(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}) > 0$ для всех $i = 1,\ldots,k$.

Задача 3.3 (формулы деления отрезка). Пусть точки A и B аффинного евклидова пространства имеют координаты $(a_1,\ldots,a_n)$ и $(b_1,\ldots,b_n)$, соответственно. Пусть также дано отношение $\lambda:\mu$, где $\lambda > 0$ и $\mu > 0$. Скажем, что точка X *делит отрезок* AB *в отношении* $\lambda:\mu$, если $\frac{|\overline{AX}|}{|\overline{XB}|} = \frac{\lambda}{\mu}$.

а) Докажите, что координаты такой точки X задаются формулами

$$x_i = \frac{\mu a_i + \lambda b_i}{\mu + \lambda}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

б) Рассмотрите случай произвольных вещественных λ и μ. Формулы выше дают координаты некоторой точки X, если $\lambda + \mu \neq 0$. Как записать условие, связывающее точки A, B, X в общем случае? Проанализируйте случаи взаимного расположения точек A, B, X в зависимости от λ и μ.

Задача 3.4. Найдите единичный вектор вдоль биссектрисы угла, образованного векторами $\boldsymbol{a} = (-3,0,4)$ и $\boldsymbol{b} = (5,-2,-14)$.

Задача 3.5. Найдите ортогональную проекцию вектора $\boldsymbol{c} = (0,2,1)$ на плоскость, определяемую векторами $\boldsymbol{a} = (1,1,1)$ и $\boldsymbol{b} = (2,-1,2)$, и вычислите угол между вектором $\boldsymbol{c}$ и его проекцией.

Задача 3.6. Дополните данную систему векторов до ортонормированного базиса эрмитова пространства $\mathbb{C}^4$: $\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i,0,0,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0)$.

Задача 3.7. Методом ортогонализации Грама–Шмидта постройте ортогональный базис подпространства пространства многочленов, порождённого многочленами x^3, x^4, x^5, x^6 со скалярным произведением, заданным интегралом: а) $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$; б) $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Задача 3.8. а) Докажите, что процесс ортогонализации Грама–Шмидта не увеличивает длины векторов, т. е. $|\boldsymbol{b}_k| \leqslant |\boldsymbol{a}_k|$, $k = 1,\ldots,n$, где векторы $\boldsymbol{b}_k$ получены из $\boldsymbol{a}_k$ процессом ортогонализации.
б) Зафиксируем k. При каких условиях на $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ имеет место равенство $|\boldsymbol{b}_k| = |\boldsymbol{a}_k|$?

Задача 3.9. Докажите, что в процессе ортогонализации системы векторов $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ возникает нулевой вектор $\boldsymbol{b}_k$ тогда и только тогда, когда исходная система $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ линейно зависима. Точнее, $\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}_k \in \langle \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{k-1}\rangle$.

Задача 3.10. Пусть $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_k$ — набор ортонормированных векторов в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что а) для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено *неравенство Бесселя*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{x})^2 \leqslant |\boldsymbol{x}|^2,$$

причём б) равенство (*равенство Парсеваля*) достигается для всех $\boldsymbol{x}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_k$ — ортонормированный базис, т. е. $k = n$.

Задача 3.11 (QR-разложение). Докажите, что любую вещественную матрицу A размера $m\times n$ можно представить в виде $A = QR$, где Q — ортогональная матрица размера $m\times m$, а $R = (r_{ij})$ — верхнетреугольная матрица размера $m\times n$ с неотрицательными числами на диагонали (т.е. $r_{ij} = 0$ при $i > j$ и $r_{ii} \geqslant 0$).

Задача 3.12. *Многочлены Лежандра* $P_k(x)$ определяются формулами

$$P_0(x) = 1, \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}\big((x^2-1)^k\big), \quad k \geqslant 1.$$

а) Докажите, что многочлены Лежандра удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}xP_k(x) - \frac{k}{k+1}P_{k-1}(x), \quad k \geqslant 1.$$

Найдите явные выражения для $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$, $P_5(x)$.

б) Докажите, что многочлены Лежандра $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ образуют ортогональный базис в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ со скалярным произведением $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

в) Найдите квадрат длины многочлена $P_k(x)$.

Задача 3.13. *Многочлены Чебышева* $T_k(x)$ определяются формулами

$$T_0(x) = 1, \quad T_k(\cos\theta) = \cos k\theta, \quad k \geqslant 1.$$

а) Докажите, что многочлены Чебышева удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geqslant 1.$$

Найдите явные выражения для $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$, $T_5(x)$.

б) Докажите, что многочлены Чебышева $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)$ образуют ортогональный базис в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ со скалярным произведением $(f,g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

в) Найдите квадрат длины многочлена $T_k(x)$.

Задача 3.14. Используя процесс ортогонализации Грама–Шмидта, представьте матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

в виде QR, где Q – ортогональная матрица, а R – верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали.

Задача 3.15. Используя процесс ортогонализации Грама–Шмидта, представьте матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

в виде RQ, где Q – ортогональная матрица, а R – верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали.

Задача 3.16. Используя процесс ортогонализации Грама–Шмидта, представьте матрицу

$$\begin{pmatrix} 1+i & -2-i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

в виде UR, где U – унитарная матрица, а R – верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали.