Анализ-2 НМУ, февраль-май 2025 гг.

Листок №6

1) множества меры 0 (как они определялись в 1 семестре) всегда измеримы;

2) Доказать, что f измерима тогда, и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) $\{x:\ f(x)<c\}$ измеримо при каждом $c\in\mathbb{R}$;
2) $\{x:\ f(x)\le c\}$ измеримо при каждом $c\in\mathbb{R}$;
3) $\{x:\ f(x)>c\}$ измеримо при каждом $c\in\mathbb{R}$;
4) $\{x:\ f(x)\ge c\}$ измеримо при каждом $c\in\mathbb{R}$;

3) (измеримость суперпозиции) пусть $f:\ X\to\mathbb{R}$, $\phi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – измеримые функции, причём на X рассматривается борелевская алгебра всех измеримых по Лебегу множеств, а на $\mathbb{R}$ – стандартная (минимальная) борелевская алгебра, порождённая лучами. Тогда $\phi(f(x))$ – измеримая функция на X;

4) непрерывная функция на отрезке измерима;

5) простая функция f измерима тогда, и только тогда, когда для каждого $y\in\mathbb{R}$ множество $A=\{x:\ f(x)=y\}$ измеримо;

6) функции x^2, λx ($\lambda=const$) и $1/x$ измеримы на $\mathbb{R}$;

7) доказать основные свойства интеграла по отношению к арифметическим операциям над функциями (сначала для простых функций, а затем применяя предельный переход):

7.1) $\int\limits_A 1\cdot d\mu=\mu(A)$;
7.2) $\int\limits_A(\lambda f)d\mu=\lambda\int\limits_A fd\mu$;
7.3) $\int\limits_A fd\mu+\int\limits_A gd\mu=\int\limits_A(f+g)d\mu$;
7.4) ограниченная измеримая функция интегрируема;
7.5) если $f(x)\ge 0$ на A, то $\int\limits_A fd\mu\ge 0$;
7.6) если $\mu(A)=0$, то $\int\limits_A fd\mu=0$;

План лекции №6. Измеримые функции. Интеграл Лебега.

Измеримые функции. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова. Интеграл простой функции. Интеграл общей измеримой функции. Свойства интеграла по отношению к арифметическим операциям.