

ВШЭ, риманова геометрия. Листок 2.
Геодезические. 13.02.2025.

Задача 1. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ касаются вдоль кривой, которая геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Задача 2. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают (в такой ситуации говорят, что поверхности пересекаются трансверсально), то эта кривая является прямой.

Задача 3. Доказать, что если прямая лежит на поверхности, то она будет геодезической на этой поверхности.

Доказать, что геодезическими в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ являются в точности прямые.

Задача 4. Найти геодезические на сфере, цилиндре, круговом конусе (все три поверхности в $\mathbb{E}^3$).

Задача 5. Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

Задача 6. Описать геодезические на поверхности вращения, получив соотношение между r и α , где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 7. Найти на круговом конусе самопересекающиеся геодезические. *Указание: рассмотрите развёртку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.*

Задача 8. Построить пример такого связного риманова многообразия M и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_A M \rightarrow M$ не является

- сюръективным,
- инъективным.

Задача 9*. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского как *непараметризованные кривые*. Можно взять любую из моделей плоскости Лобачевского, например верхнюю полу-плоскость с метрикой $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. *Указание. Очевидно, что $I_1 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$ является первым интегралом, так как параметр на геодезической является аффинным натуральным параметром. Найдите второй первый интеграл и с его помощью найдите $y(x)$.*

Задача 10. Докажите, что геодезическая $\exp_p(tv)$ и геодезическая сфера $\exp_p(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_p M \mid |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.