Листок 7, 31 марта 2025 г.

Задача 1. Билинейная форма $g\colon V \times V \to \mathbb{K}$ называется знакопеременной, если $g(v, v) = 0$ для любого вектора $v \in V$.

1. Покажите, что любая знакопеременная форма кососимметрична,
2. Приведите пример кососимметричной, но не знакопеременной билинейной формы.
3. Приведите пример билинейной формы, которую нельзя привести к диагональному виду.

Задача 2. Найдите функтор, сопряженный слева к функтору $V \mapsto V^*$.

Задача 3. Пусть $g\colon V \times V \to \mathbb{K}$ – невырожденная билинейная форма.

1. Покажите, что g задает изоморфизм $V \simeq V^*$ и задает билинейную форму g' на V^*.
2. Пусть $\{e_i\}$ – базис в V, и g_{ij} – матрица Грама билинейной формы g. Найдите матрицу Грама g' в базисе V^*, двойственном к $\{e_i\}$.

Задача 4.

1. Покажите, что след $\mathrm{tr}(AB)$ задает билинейную симметрическую форму на пространстве матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
2. Найдите матрицу Грама этой формы в базисе из матричных единиц на пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$.
3. Верно ли, что $\mathrm{tr}(AB)$ положительно определена над полем $\mathbb{R}$?

Задача 5. Используя изоморфизмы

$$\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{End}(\mathbb{K}^n) \simeq (\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathbb{K}^n,$$

для матриц $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ и $B \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{K})$ определим произведение Кронекера $A \otimes B$ как произведение соответствующих тензоров.

1. Опишите $(A \otimes B)_{ij}$.
2. Выразите $\mathrm{tr}(A \otimes B)$ через $\mathrm{tr}(A)$ и $\mathrm{tr}(B)$.
3. Выразите AB через свертку и произведение Кронекера в случае, когда $n = m$.

Задача 6. Пусть $g\colon V \times V \to \mathbb{K}$ – симметрическая билинейная форма.

1. Покажите, что g индуцирует билинейную форму $g^{\otimes m}$ на $V^{\otimes m}$ и $g^{\wedge m}$ на $V^{\wedge m}$.
2. Покажите, что
$$g^{\wedge m}(\epsilon_1 \wedge \ldots \wedge \epsilon_m, \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_m) = \det(g(\epsilon_i, \eta_j)).$$
3. Пусть g невырождена. Верно ли то же самое для $g^{\otimes m}$ и $g^{\wedge m}$?