ВШЭ, риманова геометрия. Листок 11.
Оператор Лапласа. Минимальные подмногообразия. 15.05.2025.

Задача 1. Доказать обобщённую теорему Гаусса-Остроградского: если риманово многообразие с краем M компактно и ориентировано, то

$$\int_M \mathrm{div} X dVol_M = \int_{\partial M} (X, \vec{n}) dVol_{\partial M},$$

где $\vec{n}$ — внешнее нормальное поле к ∂M в $TM|_{\partial M}$, а $dVol_M$ и $dVol_{\partial M}$ формы объема, индуцированные $(\cdot\,,\cdot)$ и $(\cdot\,,\cdot)|_{\partial M}$, соответственно.

Задача 2. Пусть $e_1, \dots, e_n$ локальный ортонормированный базис в векторных полях в некоторой окрестности точки p многообразия M, а $c_1(t)$, $\dots$, $c_n(t)$ — такие геодезические, что $c_i(0) = p$ и $c_i'(0) = e_i$. Доказать, что оператор Лапласа-Бельтрами можно найти по формуле

$$\Delta f(p) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2} f(c_i(t))|_{t=0}.$$

Задача 3. Доказать, что катеноид $f(s,t) = (\mathrm{ch}\, s \cos t, \mathrm{ch}\, s \sin t, s)$, геликоид $f(s,t) = (t \cos s, t \sin s, s)$ являются локально изометричными минимальными поверхностями в $\mathbb{R}^3$.

Задача 4. Найти все минимальные поверхности вращения в трёхмерном евклидовом пространстве.

Задача 5. Назовём функцию обобщённо линейной, если её гессиан нулевой. Доказать, что если M — минимальное подмногообразие N, а f — обобщённая линейная функция на N, то её ограничение $f|_M$ является гармонической функцией.

Задача 6. Докажите формулу Бохнера: если u гладкая функция на римановом многообразии, то

$$\Delta \left(\frac{|\mathrm{grad} u|^2}{2} \right) = \langle \mathrm{grad} \Delta u, \mathrm{grad} u \rangle + |\mathrm{Hess} u|^2 + \mathrm{Ric}(\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} u).$$

Задача 7. Риманова метрика на римановой поверхности Σ называется конформной, если в локальных координатах она может быть записана как $\lambda^2(z) dz \otimes d\bar{z}$, где $\lambda(z) > 0$ положительная вещественнозначная функция. Доказать, что для конформной метрики

$$\Delta = -\frac{4}{\lambda^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Задача 8. Пусть $X : U \to \mathbb{R}^3$ минимальная поверхность. Поверхность $X^* : U \to \mathbb{R}^3$ называется сопряжённой к X, если $X + iX^*$ голоморфное отображение. Докажите, что X^* тоже минимальная поверхность.

Задача 9. Найдите поверхность, сопряжённую к катеноиду.

Задача 10. Пусть X минимальная поверхность, X^* сопряжённая к ней. Докажите, что $X(t) = \mathrm{Re}(e^{it}(X + iX^*))$ является семейством минимальных поверхностей, деформирующим X в X^*. Постройте такое семейство для катеноида.