ВШЭ, риманова геометрия.
Домашняя контрольная работа.
Решения прислать отсканированными в один pdf-файл не позднее 31.03.2025.

Пересчет баллов в оценки следующий: $\min\left(10, \left\lceil \frac{\textit{сумма баллов}}{10} \right\rceil\right)$.

Задача 1. Поверхностью Лиувилля называют поверхность, метрика которой может быть в подходящих координатах приведена к виду

$$g = (f(u) + g(v))(du^2 + dv^2).$$

Доказать, что а) поверхность, локально изометричная поверхности вращения, есть поверхность Лиувилля *(10 баллов);* б) геодезические на поверхности Лиувилля интегрируются в квадратурах *(10 баллов).*

Задача 2. Для связности в касательном расслоении доказать следующие тождества:

а) первое тождество Бианки $dT^i = -T^j \wedge \Gamma^i_j + e^j \wedge F^i_j$, *(15 баллов),*

б) второе тождество Бианки $dF^j_i = \Gamma^k_i \wedge F^j_k - F^k_i \wedge \Gamma^j_k$, *(10 баллов),*

где e^i дуальный базис к выбранному базису e_i в векторных полях, Γ^i_j локальная 1-форма связности,

$$F^j_i = R^j_{kl,i} e^k \otimes e^l = \sum_{k<l} R^j_{kl,i} e^k \wedge e^l$$

локальная 2-форма кривизны, а T^i локальные 2-формы кручения,

$$T^k = T^k_{ij} e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T^k_{ij} e^i \wedge e^j.$$

Задача 3. Доказать, что для симметричной связности ∇ имеет место тождество Бианки $(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) = 0$, где X, Y, Z и V векторные поля. В компонентах это тождество имеет вид

$$\nabla_m R^l_{ij,k} + \nabla_i R^l_{jm,k} + \nabla_j R^l_{mi,k} = 0 \quad \text{или} \quad R^l_{ij,k;m} + R^l_{jm,k;i} + R^l_{mi,k;j} = 0.$$

(20 баллов).

Задача 4. Доказать, что

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \operatorname{Ric}^l_m = \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x^m},$$

где S скалярная кривизна. *(10 баллов).*

Задача 5. Рассмотрим геодезические координаты x^i в окрестности точки p. Зададим векторное поле

$$\mathcal{R} = \sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Доказать, что $\nabla_{\mathcal{R}} \mathcal{R} = \mathcal{R}$. *(10 баллов).*

Задача 6*. Доказать, что в нормальных координатах в окрестности точки p верно

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ijkl}(p) x^k x^l + O(|x|^3).$$

(25 баллов).

Задача 7*. Пусть M риманово многообразие и $p \in M$. Напомним, что на M есть структура метрического пространства с метрикой $d(x, y)$, равной инфимуму длин кусочно-гладких кривых, соединяющих точки x и y. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta > 0$, что для любых $\xi, \eta \in T_pM$ таких, что $|\xi| < \delta$, $|\eta| < \delta$, верно

$$\frac{d(\exp_p \xi, \exp_p \eta)}{|\xi - \eta|} = 1 + O(\varepsilon^2).$$

(40 баллов).