

Независимый Университет, осень 2025

Г.Б. Шабат,

Двойственность Понтрягина

Лекция 3 (2 октября 2025) – план

Преобразования Фурье и Меллина, тета и дзета

О мере Хаара. Для $G \in \mathcal{LCA}\mathcal{G}$ обозначения Haar_G ,

$$\int f | \text{Haar}_G \text{ или } \int_K f | \text{Haar}_G.$$

Общее преобразование Фурье. Обозначение: для

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C} : \chi \mapsto$$

вводится

$$\boxed{\mathcal{F}[f] \text{ или } \widehat{f}} : \widehat{G} \longrightarrow \mathbb{C} : \chi \mapsto \int f \cdot \chi | \text{Haar}.$$

Функции будут *шварцевы* $\in \text{Schw}$: гладкие и быстро убывающие.

Сегодня $G = \mathbb{R}^+$ и $G = \mathbb{R}_{>0}^\times$.

Классическое преобразование Фурье.

$$\mathcal{F} : \text{Schw} \longrightarrow \text{Schw} : f \mapsto \left(y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i xy} dx \right).$$

Преобразование Меллина. Класс функций не очень определён (потребуются *регуляризации*).

$$\mathcal{M} : f \mapsto \left(s \mapsto \int_0^\infty f(s) t^s \frac{ds}{s} \right).$$

Пример: гамма-функция. $f(t) = e^{-t}$.

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^\infty t^s e^{-t} \frac{dt}{t}.$$

К чему будем применять преобразование Меллина.

$$\boxed{\vartheta(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}}.$$

Дзета-функция Римана.

$$\boxed{\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}}.$$

(Мультипликативная) тета-функция.

$$\boxed{\Theta(Z|q) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n}.$$

Здесь $Z \in \dot{\mathbb{C}}$, $q \in \dot{\mathbb{D}}_1$ или

$$\Theta \in \mathbb{Q}(Z)[[q]].$$

(Первое) функциональное уравнение.

$$qZ\Theta(q^2Z|q) = \Theta(Z|q).$$

Переход к аддитивным аргументам. $Z =: e^{2\pi iz}$. Получаем ряд Фурье

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2\pi nz).$$

Ещё $q =: e^{\pi i \tau}$

$$\theta(z|\tau) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}.$$

Связь с решёткой $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$.