

Листок 2, 15 сентября 2025 г.

Задача 1. (лемма Накаямы).

1. Пусть M – конечно порожденный A -модуль, а I – идеал в A , содержащийся в радикале Джекобсона кольца A . Если $IM = M$, то $M = 0$.
2. Пусть $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал в A . Пусть x_i , $1 \leq i \leq n$ – элементы A -модуля M , образы которых в $M/\mathfrak{m}M$ составляют базис этого векторного пространства. Тогда x_i порождают M .

Задача 2.

1. Пусть $A \subset B \subset C$ – некоторые кольца. Если B цело над A , а C цело над B , то C цело над A (транзитивность целой зависимости).
2. Пусть $A \subset B$ – кольца, C – целое замыкание A в B . Тогда C цело замкнуто в B .

Задача 3. Найдите кольца целых в полях $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$; $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1})$.

Задача 4. Пусть $K/\mathbb{Q}$ – конечное расширение, а $R \subset K$ – подкольцо целых. Докажите, что а) если $\sigma \in \text{Aut}(K/\mathbb{Q})$, то $\sigma(R) = R$; б) $R \cong \mathbb{Z}^{[K:\mathbb{Q}]}$ (как абелевы группы); в) $K = R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Задача 5. Найдите размерности неприводимых над полем $\mathbb{C}$ представлений групп S_4 ; S_5 .

Задача 6. Пусть C – центр группы G ,

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in C^n \mid x_1 \cdots x_n = 1\} \subset C^n \subset G^n,$$

а V – неприводимое представление G . Докажите, что

1. $V^{\otimes n}$ – неприводимое представление группы G^n/H ,
2. $(\dim V)^n \mid (|G|^n/|C|^{n-1})$,
3. $\dim V \mid (G : C)$.

Задача 7. Опишите действие функторов Res и Ind на неприводимые представления групп $V_4 \subset A_4 \subset S_4$.

Задача 8. Пусть $G_2 \subset G_1 \subset G$. Докажите, что а) $\text{Res}_{G_2}^G = \text{Res}_{G_2}^{G_1} \circ \text{Res}_{G_1}^G$; б) $\text{Ind}_{G_2}^G = \text{Ind}_{G_1}^G \circ \text{Ind}_{G_2}^{G_1}$.

Задача 9. Пусть $\phi : H \rightarrow G$ – гомоморфизм групп. Определите функторы ограничения $\text{Rep } G \rightarrow \text{Rep } H$ и индукции $\text{Rep } H \rightarrow \text{Rep } G$, так чтобы выполнялось условие сопряженности и утверждения предыдущей задачи.

Задача 10. Докажите, что

1. $\text{Res}(U \oplus V) = \text{Res } U \oplus \text{Res } V$, $\text{Ind}(U \oplus V) = \text{Ind } U \oplus \text{Ind } V$,
2. $\text{Res}(U \otimes V) = \text{Res } U \otimes \text{Res } V$,

3. $\text{Res}(V^*) = (\text{Res } V)^*$,
4. (формула проекции) $\text{Ind}_H^G(U \otimes \text{Res}_H^G V) = (\text{Ind}_H^G U) \otimes V$.

Задача 11. Докажите, что

1. $\text{Ind}_H^G U = \{f: G \rightarrow U \mid f(hx) = hf(x)\}$ с действием G , заданным формулой $gf(x) = f(xg)$,
2. $\text{Ind}_H^G V = V \otimes_{K[H]} K[G]$.

Задача 12. Пусть V — представление группы G , $V = \bigoplus_i V_i$ (сумма подпространств), причем группа G транзитивно переставляет слагаемые. Докажите, что $V = \text{Ind}_H^G V_{i_0}$, где $H = \{g \in G \mid g(V_{i_0}) \subset V_{i_0}\}$.

Задача 13. Пусть H и K подгруппы в G , а ρ — представление G . Докажите, что

$$\text{Res}_K^G \text{Ind}_H^G \rho = \bigoplus_{s \in K \backslash G/H} \text{Ind}_{H_s}^K \rho_s,$$

где $H_s = sHs^{-1} \cap K$, а представление ρ_s группы H_s задается формулой $\rho_s(x) = \rho(s^{-1}xs)$.

Задача 14. (Критерий Макки) Докажите, что

1. $\text{Ind}_H^G \rho$ — неприводимо $\Leftrightarrow \rho$ — неприводимо, и $\forall s \in G \setminus H$ имеем $\langle \chi_{\rho_s}, \chi_{\text{Res}_{H_s}^H \rho} \rangle = 0$, где $H_s = sHs^{-1} \cap H$,
2. если H — нормальна, то $\text{Ind}_H^G \rho$ — неприводимо $\Leftrightarrow \rho$ — неприводимо, и $\forall s \in G \setminus H$ имеем $s^{-1}\rho s \not\cong \rho$.

Задача 15. Над полем $\mathbb{R}$ разложите в сумму неприводимых представление $G_1 \times G_2$ в $V_1 \otimes V_2$, если

1. $G_i = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$, $(n_1, n_2) = 1$, а V_i — неприводимы;
2. $G_1 = G_2 = H$ (группа кватернионов $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$), $V_1 = V_2 = \mathbb{H}$ (алгебра кватернионов).

Задача 16. Докажите, что $\text{Ind}_{G_1}^{G_1 \times G_2} V = V \otimes K[G_2]$.