Листок 1, 8 сентября 2025 г.

Задача 1. Составьте таблицы характеров (над $\mathbb{C}$) для групп

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
2. S_3;
3. $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$;
4. диэдра.

Задача 2. Опишите структуру кольца Гротендика для групп из предыдущей задачи.

Задача 3. Вычислите характер стандартного представления группы S_n.

Задача 4. Найдите кратности неприводимых представлений в стандартном представлении групп

1. S_3;
2. S_4.

Задача 5. Пусть ρ — неприводимое представление, $e_\rho = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g^{-1})g \in K[G]$, и $K = \overline{K}$. Докажите, что

1. $e_\rho \in Z(K[G])$;
2. e_ρ — проектор на изотипическую компоненту представления ρ.

Задача 6. Пусть V — представление группы G.

1. Покажите, что $\Lambda^p V$ и $S^p V$ — подпредставления в $V^{\otimes p}$.
2. Докажите, что
$$\chi_{S^2V}(g) = \frac{\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)}{2}, \quad \chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)}{2}.$$
3. Если $n_1(\sigma), \ldots, n_p(\sigma)$ — длины независимых циклов, из которых состоит σ, то
$$\chi_{\Lambda^p V}(g) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon(\sigma)\chi_V(g^{n_1(\sigma)})\ldots\chi_V(g^{n_p(\sigma)}).$$

Задача 7. Пусть V — неприводимое комплексное представление группы G.

1. Докажите, что на V существует ненулевая G-инвариантная билинейная форма $\Leftrightarrow \chi_V = \chi_{V^*}$.

2. Пусть теперь B такая форма. Докажите, что
   (a) $V \cong V^*$;
   (b) B невырождена;
   (c) B единственна с точностью до константы;
   (d) B либо симметрична, либо кососимметрична;
   (e) B симметрична $\Leftrightarrow \sum_{g\in G} \chi_V(g^2) = |G|$;
   (f) B кососимметрична $\Leftrightarrow \sum_{g\in G} \chi_V(g^2) = -|G|$.

Задача 8. Докажите, что

1. V — представление над $\mathbb{R} \Rightarrow V^* \cong V$;
2. V — представление над $\mathbb{C} \Rightarrow V^* \cong \overline{V}$.

Задача 9. Докажите, что

1. если U — представление группы G над $\mathbb{R}$, то $V = U_{\mathbb{C}}$ — представление группы G над $\mathbb{C}$, причём $V \cong V^* \cong \overline{V}$;
2. неприводимое комплексное представление V группы G изоморфно представлению вида $U_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow$ на V существует ненулевая G-инвариантная симметрическая форма.

Задача 10. Пусть U — неприводимое представление группы G над $\mathbb{R}$. Докажите, что

1. если $\mathrm{End}_G(U) = \mathbb{R}$, то $U_{\mathbb{C}} = V$ неприводимо над $\mathbb{C}$ и $\chi_U = \chi_V$;
2. если $\mathrm{End}_G(U) = \mathbb{C}$, то $U_{\mathbb{C}} \cong V \oplus V^*$, $V \ncong V^*$ неприводимо над $\mathbb{C}$ и $\chi_U = \chi_V + \chi_{V^*}$;
3. если $\mathrm{End}_G(U) = \mathbb{H}$, то $U_{\mathbb{C}} \cong V \oplus V$, V неприводимо над $\mathbb{C}$ и $\chi_U = 2\chi_V$.

Задача 11. Пусть V — неприводимое представление группы G над $\mathbb{C}$. Докажите, что

1. если $\chi_V = \chi_{V^*}$ и $\sum_{g\in G} \chi_V(g^2) = |G|$, то $V \cong U_{\mathbb{C}}$, U — неприводимо над $\mathbb{R}$ и $\chi_U = \chi_V$;
2. если $\chi_V \neq \chi_{V^*}$, то $V \oplus V^* \cong U_{\mathbb{C}}$, U — неприводимо над $\mathbb{R}$ и $\chi_U = \chi_V + \chi_{V^*}$;
3. если $\chi_V = \chi_{V^*}$ и $\sum_{g\in G} \chi_V(g^2) = -|G|$, то $V \oplus V \cong U_{\mathbb{C}}$, U — неприводимо над $\mathbb{R}$ и $\chi_U = 2\chi_V$.

Задача 12. Опишите неприводимые представления над $\mathbb{R}$ групп

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
2. S_3;

3. $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$.

Задача 13. Если G — абелева группа, то группа $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, S^1)$ называется двойственной по Понтрягину к G. Постройте канонические изоморфизмы

1. $\widehat{G \times H} \cong \widehat{G} \times \widehat{H}$;
2. $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mu_n(\mathbb{C})$, $\widehat{\mu_n(\mathbb{C})} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
3. $\widehat{\widehat{G}} \cong G$;
4. $\widehat{\mathbb{Z}} \cong S^1$, $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$.
5. Докажите, что всякая $\mathbb{C}$-значная функция на G является линейной комбинацией элементов из $\widehat{G}$ и выпишите явную формулу для коэффициентов (преобразование Фурье).

Задача 14. (Соответствие Маккея) Пусть G — конечная подгруппа в $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$, $V_1, \ldots, V_n$ — все её неприводимые представления, а L — её тавтологическое двумерное представление. Пусть $a_{ij} = \mathrm{mult}_{V_i}(V_j \otimes L)$. Предположим, что G — циклическая группа или группа диэдра. Докажите, что

1. матрица $C = (2\delta_{ij} - a_{ij})$ симметрична;
2. билинейная форма с матрицей Грама C положительно полуопределена;
3. вектор с координатами $x_i = \dim V_i$ порождает ядро формы C;
4. нарисуйте граф с n вершинами и a_{ij} ребрами между i-ой и j-ой вершиной;
5. сотрите вершину, соответствующую тривиальному представлению, и все ребра, выходящие из нее;
6. * проделайте те же действия для бинарных групп тетраэдра, куба и октаэдра.

Графы, возникающие в пунктах (d), (e) и (f) очень часто встречаются в математике в задачах классификации. Они называются диаграммами Дынкина.