Семинар 1 (20 февраля). Группы Ли, подгруппы, действия.

Теорема 1. *Пусть группа Ли G гладко действует на многообразии X, тогда для любой точки $x \in X$ стабилизатор G_x является подгруппой Ли. Более того, если орбита G_x является гладким подмногообразием в X, то верно* $\dim G = \dim G_x + \dim Gx$.

Теорема 2. *Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – подгруппа Ли. Тогда на множестве G/H левых смежных классов существует единственная структура гладкого многообразия, при которой отображение $p\colon G \to G/H, g \mapsto gH$ является факторизацией. В частности, $f\colon G/H \to X$ гладко $\Leftrightarrow$ $f \circ p\colon G \to X$ гладко.*

Следствие 3. *Биективный гомоморфизм групп Ли является изоморфизмом.*

Задача 1. Покажите, что следующие группы являются вещественными линейными группами Ли ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$):

(а) $SL_n(\mathbb{K})$; (б) $O_n(\mathbb{K})$ и $SO_n(\mathbb{K})$; (в) U_n и SU_n; (г) $O_{p,q} = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid ABA^t = B\}$, где B – симметричная билинейная форма сигнатуры p, q; (д) $Sp_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid A^t JA = J\}$, где J – симплектическая форма; (е) $Aff_n(\mathbb{K})$.

Какие из них являются комплексными подгруппами Ли при естественном вложении в $GL_n(\mathbb{C})$?

Задача 2. (а) Вычислите размерность $SL_n(\mathbb{K})$,

(б) Вычислите размерность $O_n(\mathbb{R})$ двумя способами:

1) Реализуйте $O_n(\mathbb{R})$ как стабилизатор некоторого гладкого действия $GL_n(\mathbb{R})$;

2) Постройте гладкое действие $O_n(\mathbb{R})$ на S^{n-1}, найдите орбиту и стабилизатор и вычислите по индукции.

(в) Вычислите размерность $SO_n(\mathbb{R})$.

Задача 3. Докажите, что группа автоморфизмов $Aut(A)$ любой конечномерной алгебры A является (линейной) группой Ли.

Задача 4. Пространством флагов $Fl_{k_1,k_2,\dots,k_s}$ называется множество цепочек вложенных подпространств $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_s = \mathbb{K}^n$ с заданными размерностями $\dim V_i = k_i$.

(а) Покажите, что группа $GL_n(\mathbb{K})$ действует транзитивно на множестве флагов данной размерности. Это позволяет наделить пространство флагов структурой гладкого многообразия.

(б) Вычислите размерность $Gr(k, n)$.

(в) Покажите, что пространство флагов компактно.

Задача 5. Группы $PGL_n(\mathbb{K})$, соотв. $PSL_n(\mathbb{K})$ определяются как фактор $GL_n(\mathbb{K})$, соотв. $SL_n(\mathbb{K})$ по подгруппе скалярных матриц.

(а) Докажите, что $PSL_n(\mathbb{C}) \simeq PGL_n(\mathbb{C})$ и $PSL_n(\mathbb{R}) \simeq PGL_n(\mathbb{R})$ при $n = 2k + 1$.

(б) Докажите, что $PSL_n(\mathbb{R})$ является собственной подгруппой Ли группы $PGL_n(\mathbb{R})$ при $n = 2k$.

(в) Докажите, что $PGL_n(\mathbb{K})$ является подгруппой Ли группы Ли $GL_{n^2}(\mathbb{K})$.

Задача 6. (а) Докажите, что связная группа Ли порождается любой окрестностью единицы.

(б) Покажите, что связная компонента единицы группы Ли является нормальной подгруппой Ли, а фактор по ней – дискретной группой. Эта факторгруппа называется группой компонент данной группы Ли.

(в) Найдите группу компонент для групп Ли $GL_n(\mathbb{K}), SL_n(\mathbb{K})$ и $PGL_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$);

(г) Тот же вопрос для $O_n(\mathbb{K})$ и U_n.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Докажите, что пересечение двух подгрупп Ли в группе Ли и полный прообраз подгруппы Ли при гомоморфизме групп Ли – тоже подгруппа Ли. Приведите пример пересечения двух подмногообразий многообразия, которое не является подмногообразием.

Задача 2. Вычислите размерности U_n и SU_n.

Дополнительные задачи

Задача 3. Обозначим $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ комплексное подпространство бесследовых матриц в $Mat_2(\mathbb{C})$. Обозначим $H_2 \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ вещественное подпространство косоэрмитовых матриц.

(а) Покажите, что $det(X)$ является невырожденной (комплексной) квадратичной формой на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

(б) Покажите, что $det(X)$ является положительно определённой вещественной квадратичной формой на H_2.

(в) Покажите, что присоединенное действие $Ad : SL_2(\mathbb{C}) \to End(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})), Ad_g \colon X \to gXg^{-1}$ сохраняет квадратичную форму $det(X)$, а значит задает гомоморфизм групп $p' \colon SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$.

(г) Покажите, что сопряжение унитарной матрицей сохраняет подпространство H_2 и форму $det(X)$, а значит задаёт гомоморфизм групп $p \colon SU_2 \to SO_3(\mathbb{R})$.

(д) Постройте диффеоморфизм между $SO_3(\mathbb{R})$ и вещественным проективным пространством $\mathbb{RP}^3$; между SU_2 и 3-мерной сферой S^3.

(е) Вычислите ядро гомоморфизмов p, p'.

(ж) Покажите, что p, p' сюрьективны. *Указание: воспользуйтесь тем, что связная группа порождается окрестностью единицы.*