

ВШЭ, риманова геометрия.

Экзамен для 4 курса бакалавриата и 2 курса магистратуры

Решения прислать отсканированными в один pdf-файл не позднее 22.05.2025.

Пересчет баллов в оценки следующий: $\min\left(10, \left\lceil \frac{\text{сумма баллов}}{10} \right\rceil\right)$.

Задача 1. Пусть $\varphi, \psi : M \rightarrow M$ две изометрии полного риманова многообразия M . Докажите, что если существует точка $p \in M$, такая, что $\varphi(p) = \psi(p)$ и $d_p\varphi = d_p\psi$, то $\varphi \equiv \psi$ на всём M . (25 баллов).

Задача 2. Подмногообразие N риманова многообразия M называют вполне геодезическим, если любая геодезическая на N является геодезической на M . Докажите, что N вполне геодезическое подмногообразие M тогда и только тогда, когда вторая квадратичная форма N в M нулевая. (10 баллов).

Задача 3. Рассмотрим точку p на круговом конусе C , отличную от его вершины. Пусть касательный вектор $X \in T_p C$ ортогонален прямолинейной образующей конуса, проходящей через точку p . Рассмотрим геодезическую $\gamma_{p,X}(t)$, выходящую из точки p с вектором скорости X . Существует ли точка раздела для точки p на геодезической $\gamma_{p,X}(t)$? Если да, как её найти? (10 баллов).

Задача 4. Докажите, что если существует такая точка p на римановом многообразии M , что для любого касательного вектора $X \in T_p M$ существует точка раздела для точки p на геодезической $\gamma_{p,X}(t)$, то многообразие M компактно. (15 баллов).

Задача 5. Докажите, что точки, сопряжённые к точке p вдоль геодезической $\gamma_{p,X}(t)$, являются изолированными. (10 баллов).

Задача 6. Докажите, что якобиево векторное поле $J(t)$ является касательным векторным полем некоторой геодезической вариации, то есть существует такая вариация $\gamma(t, s)$ геодезической $\gamma(t)$ с параметром вариации s , что

$$\frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = J(t),$$

и при любом фиксированном значении $s = s_0$ кривая $\gamma(t, s_0)$ — геодезическая. (10 баллов).

Задача 7. Доказать, что $\Delta f = -\text{tr}_g \text{Hess } f$. (10 баллов).

Задача 8. Пусть p точка риманова многообразия M , а $r(x) = d(p, x)$ — функция расстояния до точки p . Пусть $\gamma(t)$ геодезическая с единичным вектором скорости, выходящая из точки p , а $J(t)$ якобиево векторное поле на этой геодезической. Докажите, что вторая вариация геодезической при том, что

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s_1} = \frac{\partial \gamma}{\partial s_2} = J,$$

равна $\text{Hess } r(J(\beta), J(\beta))$, при достаточно малых $\beta > 0$. (30 баллов).

Задача 9. Докажите, что полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны диффеоморфно евклидовому пространству. (20 баллов).

Задача 10. Докажите, что любая пара точек на полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны соединяется единственной геодезической, которая минимальна. (20 баллов).