Анализ-2 НМУ, февраль-май 2025 гг.

Листок №2

1) если f дифференцируема в связной области $D \subset \mathbb{R}^n$ и $df = 0$ в каждой точке этой области, то $f = const$ в D;

2) если $f \in C^k$, то все частные производные до k-х включительно не зависят от порядка дифференцирования;

3) пусть $F(t) = f(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$, где $\phi_1, \ldots, \phi_n$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки t_0, а $f \in C^1$ в окрестности $(\phi_1(t_0), \ldots, \phi_n(t_0))$. Тогда

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x=\phi(t_0)} \cdot \phi_i'(t_0)$$

(формула дифференцирования "сложной функции" (суперпозиции));

4) показать, что если $u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$, где $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\cos\varphi\sin\psi$, $z = R\sin\varphi$, то $\frac{\partial u}{\partial\varphi} = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial\psi} = 0$. Какова геометрическая интерпретация этого факта?

5) доказать, что производная по направлению равна скалярному произведению градиента на направление: $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{a}} = \langle \nabla, \mathbf{a} \rangle$, где $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Точнее: пусть $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x + t\mathbf{a}) - f(x)}{t}$, тогда $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \langle \nabla f, \mathbf{a} \rangle$ $(\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}))$;

6) доказать, что производная по направлению равна значению дифференциала на направлении. Точнее: $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = df(\mathbf{a})$;

7) $z = F(r, \phi)$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$;

План лекции №2. Формула Тэйлора. Теорема о неявной функции.

Частные производные высших порядков, условие их коммутирования. Класс C^k. Многомерная формула Тэйлора. Теорема о неявной функции.