НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 1.
Кривые в плоскости и пространстве. 12.02.2025.

Задача 1. Доказать, что кривизна плоской кривой $\mathbf{r}(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2$, где t — произвольный параметр, может быть найдена по формулам

$$k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \tag{1}$$

где $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ обозначает векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Задача 2. Доказать, что кривизна пространственной кривой $\mathbf{r}(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$, где t — произвольный параметр, может быть найдена по формуле (1), а кручение — по формуле $\varkappa = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2}$, где $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ обозначает смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, то есть ориентированный объём параллелепипеда, порождённого этими векторами.

Задача 3. Найти кривизну и кручение кривой $\mathbf{r}(t) = e^t(\sin t, \cos t, 1)$.

Задача 4. Доказать, что a) если кривизна кривой тождественно равна нулю, то это прямая; b) если кручение кривой тождественно равно нулю, то эта кривая лежит в плоскости; c) кривая постоянной кривизны, лежащая на сфере, является окружностью.

Задача 5. Рассмотрим неособую плоскую кривую $\gamma(s)$, параметризованную натуральным параметром s. Предположим, что точки $\gamma(s)$, $\gamma(s+\varepsilon)$ и $\gamma(s-\varepsilon)$ находятся в общем положении (то есть не лежат на одной прямой). Обозначим через $R(s, \varepsilon)$ радиус проведённой через эти три точки окружности. Найти $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} R(s, \varepsilon)$.

Задача 6*. Доказать, что если кривая с $k \neq 0$, $\varkappa \neq 0$ лежит на сфере радиуса R, то

$$R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2}\right), \tag{2}$$

где $'$ обозначает производную по отношению к натуральному параметру. Доказать, что если ещё и $k' \neq 0$, то и обратное верно: из тождества (2) следует, что кривая лежит на некоторой сфере радиуса R.

Задача 7. Описать кривые с постоянными кривизной и кручением (то есть найти кривые, заданные натуральными уравнениями $k(s) = k_0$, $\varkappa(s) = \varkappa_0$, где k_0 и $\varkappa_0$ некоторые константы).

Задача 8*. Доказать, что выпуклая замкнутая гладкая плоская кривая имеет не менее 4 точек экстремума кривизны.

Задача 9. Доказать, что для замкнутой гладкой кривой γ с натуральным параметром s верно равенство $\int\limits_{\gamma}(\mathbf{r}\,dk + \varkappa\mathbf{b}\,ds) = 0$.

Задача 10. Рассмотрим кривую в $\mathbb{E}^n$, параметризованную произвольным параметром t. Пусть $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ обозначает объём k-параллелепипеда, порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, при $k < n$ и ориентированный объём k-параллелепипеда, порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, при $k = n$. Пусть

$$V_i = \left(\frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^i x}{dt^i}\right).$$

Доказать, что кривизну и высшие кручения можно найти по формулам

$$k = \frac{V_2}{V_1^3}, \quad \varkappa_i = \frac{V_{i+2}V_i}{V_{i+1}^2 V_1}.$$