ВШЭ, риманова геометрия. Листок 3.
Геодезические-II. 20.02.2025.

Задача 1. Описать геодезические на поверхности вращения, получив соотношение между r и α, где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 2. Найти на круговом конусе самопересекающиеся геодезические. *Указание: рассмотрите развёртку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.*

Задача 3. Построить пример такого связного риманова многообразия M и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_A M \longrightarrow M$ не является а) сюръективным, б) инъективным.

Задача 4*. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. *Указание. Очевидно, что* $I_1 = \dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ *является первым интегралом, так как параметр на геодезической является аффинным натуральным параметром. Найдите второй первый интеграл и с его помощью найдите* $y(x)$.

Задача 5. Докажите, что геодезическая $\exp_p(tv)$ и геодезическая сфера $\exp_p(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_pM | |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

Задача 6. Докажите, что в геодезических координатах, центрированных в точке p, символы Кристоффеля в точке p обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Задача 7. Докажите, что центрированные в точке p координаты $x^1, \ldots,$ x^n, определённые в окрестности U, являются геодезическими координатами, центрированными в точке p, тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk} x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \ldots, x^n$ в U. *Указание. Обратите внимание на то, что в геодезических координатах, центрированных в точке p, геодезические, проходящие через точку p, имеют вид $x^i = a^i t$.*

Задача 8. Докажите, что в полугеодезических координатах $x^1, \ldots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \text{const}, \ldots, x^{n-1} = \text{const}$ являются геодезическими с параметром $t = x^n$.

Задача 9*. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. *Указание. Очевидно, что* $I_1 = \dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ *является первым интегралом, так как параметр на геодезической является аффинным натуральным параметром. Найдите второй первый интеграл и с его помощью найдите* $y(x)$.