

ТОПОЛОГИЯ–2

ЛИСТОЧЕК 6: КОЭФФИЦИЕНТЫ И КОГОМОЛОГИИ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Пусть $\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ — проективная резольвента модуля M и $\cdots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow N \rightarrow 0$ — просто точная последовательность модулей. Пусть для гомоморфизма $f: M \rightarrow N$ существует два его продолжения $F, F': P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ до морфизмов комплексов. Докажите, что тогда эти морфизмы комплексов гомотопны.

2. а) Докажите, что для точной последовательности модулей $M \rightarrow N \rightarrow K \rightarrow 0$ и любого модуля A индуцированная последовательность $0 \rightarrow \text{Hom}_R(K, A) \rightarrow \text{Hom}_R(N, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, A)$ также точна.

б) Докажите, что для точной последовательности модулей $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow K$ и любого модуля A индуцированная последовательность $0 \rightarrow \text{Hom}_R(A, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, N) \rightarrow \text{Hom}_R(A, K)$ также точна.

в) Докажите, что для точной последовательности модулей $M \rightarrow N \rightarrow K \rightarrow 0$ и любого модуля A индуцированная последовательность $M \otimes_R A \rightarrow N \otimes_R A \rightarrow K \otimes_R A$ также точна.

3. Докажите, что

а) модуль M проективен $\iff \text{Ext}_R^1(M, N) = 0$ для всех $N \iff \text{Ext}_R^{i>0}(M, N) = 0$ для всех N ;

б) модуль M инъективен $\iff \text{Ext}_R^1(N, M) = 0$ для всех $N \iff \text{Ext}_R^{i>0}(N, M) = 0$ для всех N ;

в) модуль M является плоским $\iff \text{Tor}_1^R(M, N) = 0$ для всех $N \iff \text{Tor}_{i>0}^R(M, N) = 0$ для всех N .

4. а) Докажите, что прямая сумма $\bigoplus P_\alpha$ проективна $\iff$ каждое слагаемое P_α проективно.

б) Докажите, что прямое произведение $\prod I_\alpha$ инъективно $\iff$ каждый множитель I_α инъективен.

в) Докажите, что прямая сумма $\bigoplus M_\alpha$ является плоской $\iff$ каждое слагаемое M_α является плоским.

5. а) Докажите, что любой проективный модуль является плоским. Приведите пример плоского не проективного модуля. Приведите пример проективного не свободного модуля.

б)* Рассмотрим кольцо $\mathbb{F}[x, y]$ многочленов над полем. Докажите, что идеал (x, y) не является плоским $\mathbb{F}[x, y]$ -модулем (хотя не имеет кручения).

6. Рассмотрим цепной комплекс R -модулей $\cdots \rightarrow C_{i+1} \rightarrow C_i \rightarrow C_{i-1} \rightarrow \cdots$

Докажите, что если M — плоский R -модуль, то $H_i(C_* \otimes_R M) \cong H_i(C_*) \otimes_R M$. Аналогично, если M — проективный R -модуль, то $H_i(\text{Hom}_R(M, C_*)) \cong \text{Hom}_R(M, H_i(C_*))$. Что насчёт инъективных модулей?

7. Докажите, что если A — плоский R -модуль, то $\text{Tor}_i^R(A \otimes_R B, C) = A \otimes_R \text{Tor}_i^R(B, C)$. И аналогично, если A — проективный R -модуль, то $\text{Ext}_R^i(A \otimes_R B, C) = \text{Hom}_R(A, \text{Ext}_R^i(B, C))$.

8. Докажите, что в группе $H^1(X; \mathbb{Z})$ не может быть кручения.

Это показывает, что, в отличие от гомологий, когомологии пространств не могут быть произвольными.

Например, можно также доказать, что единственной ненулевой группой (приведённых) когомологий пространства не может быть счётная, но не конечно порождённая группа, например, $\mathbb{Q}$.

9. Пусть $f: R \rightarrow S$ — гомоморфизм колец. Тогда любой S -модуль M можно рассматривать как R -модуль с умножением на скаляры по правилу $r \cdot m := f(r) \cdot m$. В частности, само кольцо S является R -модулем.

В обратную сторону, если M — R -модуль, то его можно двумя способами превратить в S -модуль: $S \otimes_R M$ и $\text{Hom}_R(S, M)$ с умножениями на скаляры $s \cdot (s' \otimes m) = (ss') \otimes m$ и $(s \cdot \varphi)(s') = \varphi(s's)$ соответственно.

Докажите, что если P — проективный R -модуль, то $S \otimes_R P$ — проективный S -модуль, и если I — инъективный R -модуль, то $\text{Hom}_R(S, I)$ — инъективный S -модуль.

10.* Для R -модуля M его *двойственным по Понтрягину* модулем называется $M^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ с умножением на скаляры из R по правилу: $\varphi: M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, (r \cdot \varphi)(m) := \varphi(rm)$. Заметим, что $M \mapsto M^\vee$ — контравариантный функтор.

а) Докажите, что последовательность модулей $A \rightarrow B \rightarrow C$ точна (в среднем члене) $\iff$ точна двойственная последовательность $C^\vee \rightarrow B^\vee \rightarrow A^\vee$.

б) Докажите, что модуль M является плоским $\iff M^\vee$ инъективен.

в) Докажите, что естественное отображение вычисления $ev: M \rightarrow (M^\vee)^\vee, ev(m)(\varphi) = \varphi(m)$, является инъективным.

г) Докажите, что для любого модуля M существует вложение $M \hookrightarrow I$ в инъективный модуль.

В частности, у любого модуля M существует инъективная резольвента $0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$

11. а) Рассмотрим для абелевых групп M и N их проективные резольвенты $P_\bullet \rightarrow M \rightarrow 0$ и $Q_\bullet \rightarrow N \rightarrow 0$. Докажите, что $\text{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M, N) := H_i(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} N) \cong H_i(M \otimes_{\mathbb{Z}} Q_\bullet)$.

б)* Докажите то же для R -модулей.

в)* Докажите, что $\text{Ext}_R^i(M, N) := H^i(\text{Hom}_R(P_\bullet, N)) \cong H^i(\text{Hom}_R(M, I^\bullet))$, где $P_\bullet \rightarrow M \rightarrow 0$ — проективная резольвента для M , а $0 \rightarrow N \rightarrow I^\bullet$ — инъективная резольвента для N .

г) Докажите, что $\text{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M, N) \cong H_i(F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} N) \cong H_i(M \otimes_{\mathbb{Z}} F'_\bullet)$, где $F_\bullet$ и $F'_\bullet$ — резольвенты из плоских абелевых групп для M и N соответственно.

д)* Докажите то же для R -модулей.

е) Докажите, что $\text{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M, N) \cong \text{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(N, M)$.

ё)* Докажите то же для R -модулей.

12. Докажите, что $\text{Ext}_R^i(\bigoplus M_\alpha, N) \cong \prod \text{Ext}_R^i(M_\alpha, N)$, $\text{Ext}_R^i(M, \prod N_\alpha) \cong \prod \text{Ext}_R^i(M, N_\alpha)$ и $\text{Tor}_i^R(\bigoplus M_\alpha, N) \cong \bigoplus \text{Tor}_i^R(M_\alpha, N)$.

13.* Докажите, что абелева группа A является инъективным $\mathbb{Z}$ -модулем $\iff$ она делима, то есть, $\forall x \in A \forall n \in \mathbb{N} \exists y$ т. ч. $x = ny$.

14. Для подмножества $S \subset R$, замкнутого относительно умножения (содержащего единицу и не содержащего ноль), рассмотрим фактормножество $S^{-1}R = \{ \frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S \} / \sim$, где отношение эквивалентности $\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \iff s''(rs' - r's) = 0$ для некоторого $s'' \in S$.

Убедитесь, что это кольцо относительно следующих операций: $[\frac{r}{s}] \cdot [\frac{r'}{s'}] := [\frac{rr'}{ss'}]$ и $[\frac{r}{s}] + [\frac{r'}{s'}] := [\frac{rs' + r's}{ss'}]$. Мы имеем гомоморфизм колец $R \rightarrow S^{-1}R, r \mapsto [\frac{r}{1}]$, который, в частности, превращает $S^{-1}R$ в R -модуль.

Проверьте, что аналогичную конструкцию можно проделать с любым R -модулем M и получить $S^{-1}R$ -модуль $S^{-1}M$. Более того, $S^{-1}M \cong S^{-1}R \otimes_R M$ (как $S^{-1}R$ -модули) и

ядром естественного отображения $M \rightarrow S^{-1}M$ является модуль ${}_SM = \{m \in M \mid \exists s : sm = 0\}$ (S -кручение в M).

Докажите, что $S^{-1}R$ является плоским R -модулем.

Выведите, что $S^{-1}\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = \mathrm{Tor}_i^R(S^{-1}M, N)$.

15. а) Вычислите $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m)$ и $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m)$ для всех m и n ;

б) Докажите, что $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}/n) = {}_nA = n$ -кручение(A), и $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n, A) = A/nA$. Убедитесь, что это обобщается на модули, если $\mathbb{Z}/n$ заменить на R/r , где r — не делитель нуля в R . Что насчёт Tor_0 и Ext^0 ?

в) Докажите, что $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Tors}(A)$;

г)* Докажите, что $\mathrm{Tor}_1^R(M, S^{-1}R/R) = {}_SM/({}_SR \cdot M)$;

д) Вычислите $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}/4}^i(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ и $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$;

е) Докажите, что группа $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ всегда состоит из кручения;

ё)* Для кольца без делителей нуля докажите, что $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$ всегда состоит из R -кручения для $i > 0$.

16. Для клеточного пространства X обозначим через $(C_*^{CW}(X), \partial^{CW})$ его клеточный цепной комплекс. Докажите, что когомологии $H^*(X; M)$ можно считать с помощью коцепного комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*^{CW}(X), M)$ с двойственным дифференциалом

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n^{CW}(X), M) \xrightarrow{(\partial_{n+1})^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{n+1}^{CW}(X), M)$$

17. Докажите, что для конечного клеточного пространства X его эйлерова характеристика $\chi(X)$ (знакопеременная сумма количеств клеток) равна $\sum (-1)^i \dim_{\mathbb{F}} H_i(X; \mathbb{F}) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{F}} H^i(X; \mathbb{F}) = \sum (-1)^i \mathrm{rk} H_i(X; \mathbb{Z}) = \sum (-1)^i \mathrm{rk} FH^i(X; \mathbb{Z})$ для любого поля $\mathbb{F}$.

18. Докажите, что если все $H_n(X; \mathbb{Z})$ являются конечно порождёнными абелевыми группами, то $H^n(X; \mathbb{Z})$ — тоже.

На самом деле, верно и обратное.

19. Докажите, что если отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует изоморфизм на гомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}/p$ (для всех простых p), то оно индуцирует изоморфизмы на гомологиях с целыми коэффициентами (а значит, и на (ко)гомологиях со всеми коэффициентами).

20. Докажите, что если отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует изоморфизм на когомологиях $f^*: H^*(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^*(Y; \mathbb{Z})$, а все гомологии $H_*(X; \mathbb{Z})$ и $H_*(Y; \mathbb{Z})$ конечно порождены (например, X и Y конечны), то f также индуцирует изоморфизм на целочисленных гомологиях (а значит, и на гомологиях и когомологиях со всеми коэффициентами).

Можно доказать, что на самом деле условие конечной порождённости гомологий тут не нужно.

21. Приведите пример отображения, индуцирующего нулевое отображение в целочисленных гомологиях, но не в когомологиях.

Приведите пример отображения, индуцирующего нулевое отображение в целочисленных гомологиях, но не гомологиях с какими-нибудь коэффициентами.

Убедитесь, что это доказывает неестественность расщеплений в теоремах об универсальных коэффициентах.

22. Сформулируйте и докажите теорему Майера–Виеториса для когомологий.

23. а) Для любого гомоморфизма абелевых групп $A \rightarrow B$ и любой пары пространств (X, Y) мы имеем морфизмы (ко)цепных комплексов $C_*(X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow C_*(X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} B$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X, Y), A) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X, Y), B)$, и следовательно, получаем гомоморфизмы на (ко)гомологиях: $H_n(X, Y; A) \rightarrow H_n(X, Y; B)$ и $H^n(X, Y; A) \rightarrow H^n(X, Y; B)$.

Проверьте, что получившиеся отображения являются естественными преобразованиями теорий (ко)гомологий, то есть, они естественны относительно отображений пар пространств и коммутируют с граничными отображениями в длинных точных последовательностях пар (в частности, с изоморфизмом надстройки).

Проверьте, что для любой короткой точной последовательности абелевых групп $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ и любой пары пространств (X, Y) индуцированные последовательности (ко)цепных комплексов

$$0 \rightarrow C_*(X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow C_*(X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow C_*(X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} C \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X, Y), A) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X, Y), B) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X, Y), C) \rightarrow 0$$

точны.

Следовательно, они индуцируют длинные точные последовательности (ко)гомологий

$$\cdots \rightarrow H_n(X, Y; A) \rightarrow H_n(X, Y; B) \rightarrow H_n(X, Y; C) \rightarrow H_{n-1}(X, Y; A) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow H^n(X, Y; A) \rightarrow H^n(X, Y; B) \rightarrow H^n(X, Y; C) \rightarrow H^{n+1}(X, Y; A) \rightarrow \cdots$$

Проверьте, что граничные отображения $H_n(X, Y; C) \rightarrow H_{n-1}(X, Y; A)$ и $H^n(X, Y; C) \rightarrow H^{n+1}(X, Y; A)$ также являются естественными преобразованиями теорий (ко)гомологий. Они называются *гомоморфизмами Бокштейна*.

б) Обычно рассматривают гомоморфизмы Бокштейна $\bar{\beta}: H^*(-; \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^{*+1}(-; \mathbb{Z})$ и $\beta: H^*(-; \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^{*+1}(-; \mathbb{Z}/n)$ (и аналогично в гомологиях), связанные с точными последовательностями

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n \rightarrow 0$$

и

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/n \xrightarrow{n} \mathbb{Z}/n^2 \rightarrow \mathbb{Z}/n \rightarrow 0$$

соответственно.

Убедитесь, что ядро $\bar{\beta}$ состоит в точности из классов (ко)гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/n$, которые получаются из классов (ко)гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ с помощью редукции по модулю n . Проверьте, что $r \circ \bar{\beta} = \beta$, где r — редукция по модулю n . Выведите, что $\beta^2 = 0$.

Вычислите β и $\bar{\beta}$ на гомологиях и когомологиях пространств $\mathbb{R}P^m$ (для всех коэффициентов $\mathbb{Z}/n$).

24.* Рассмотрим n -листное накрытие $p: \hat{X} \rightarrow X$. Для каждого сингулярного симплекса $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ мы имеем ровно n поднятий $\hat{\sigma}_i: \Delta^n \rightarrow \hat{X}$. Обозначим их сумму $\operatorname{tr}(\sigma) = \sum_i \hat{\sigma}_i$. Это корректно определённый гомоморфизм групп $C_n(X) \rightarrow C_n(\hat{X})$. Проверьте, что это морфизм цепных комплексов. Значит, мы получаем отображение в гомологиях $\operatorname{tr}: H_*(X; F) \rightarrow H_*(\hat{X}; F)$ (с любыми коэффициентами). Оно называется *трансфером*. Докажите, что композиция $p_* \circ \operatorname{tr} = n \cdot \operatorname{id}$. Выведите, что если n не делится на $\operatorname{char} F$, то tr инъективен.

Если $\hat{X} \rightarrow X$ — n -листное накрытие Галуа с группой G , то G действует на $\hat{X}$, и следовательно, на гомологиях $H_*(X; F)$. Докажите, что если $n = |G|$ не делится на $\operatorname{char} F$, то $\operatorname{im} \operatorname{tr} = H_*(X; F)^G$ — подгруппа неподвижных точек при действии группы G .

25.* Пусть пространство X представлено в виде объединения возрастающей цепочки подпространств $X_0 \subset X_1 \subset \dots$, $X = \bigcup X_i$, причём любое компактное подпространство $K \subset X$ лежит в некотором X_n .

Докажите, что тогда (для каждого i) имеет место естественная *короткая точная последовательность Милнора*

$$0 \rightarrow \lim_n^1 H^{i-1}(X_n) \rightarrow H^i(X) \rightarrow \lim_n H^i(X_n) \rightarrow 0$$

26.* Для пространства X рассмотрим абелеву подгруппу $C_c^n(X) \subset C^n(X) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(X); \mathbb{Z})$, состоящую из таких сингулярных коцепей φ , для каждой из которых существует такое компактное подпространство $K_\varphi \subset X$, что $\varphi(\sigma) = 0$ для любого сингулярного симплекса из $X - K_\varphi$. Убедитесь, что эти группы образуют коцепной подкомплекс в $C^*(X)$ (то есть, коцепной дифференциал сохраняет эти подгруппы). Когомологии $H_c^i(X)$ этого подкомплекса называются *когомологиями с компактными носителями*.

а) Докажите, что такие когомологии являются контравариантным функтором относительно собственных отображений, гомотопически инвариантны относительно собственных гомотопий и для компактного X совпадают с обычными когомологиями.

Докажите, что когомологии H_c^* не являются функтором относительно произвольных непрерывных отображений.

б) Вычислите $H_c^*(\mathbb{R}^n)$ и $H_c^*(\mathbb{R}^n - 0)$.

в) Докажите, что имеет место «несобственный изоморфизм надстройки» $H_c^n(X) \cong H_c^{n+1}(\mathbb{R} \times X)$.

г) Докажите, что для открытого подмножества $U \subset X$ существуют естественные гомоморфизмы «продолжения нулём» $H_c^i(U) \rightarrow H_c^i(X)$.

д) Докажите, что для клеточного пространства X и его клеточного подпространства $Z \subset X$ (на самом деле достаточно их локальной стягиваемости) существует длинная точная *последовательность локализации*

$$\dots \rightarrow H_c^n(X - Z) \rightarrow H_c^n(X) \rightarrow H_c^n(Z) \rightarrow H_c^{n+1}(X - Z) \rightarrow \dots$$

е) Докажите, что если $X \cong Y - K$, где (Y, K) — конечная клеточная пара, то $H_c^i(X) \cong H^i(Y, K) \cong H_c^i(Y/K, \text{pt})$ и Y/K — одноточечная компактификация X .

Вообще, докажите, что если $X = K - \text{pt}$, где K — хаусдорфов компакт, причём точка pt обладает в K базой окрестностей, деформационно ретрагирующихся на эту точку, то $H_c^i(X) = H^i(K, \text{pt})$.

Проверьте, что в этом случае отсюда тоже, конечно, следует точная последовательность локализации из предыдущего пункта.

ё) Докажите, что для локально конечного клеточного X когомологии $H_c^*(X)$ можно вычислять с помощью клеточного коцепного комплекса пространства X , в котором рассматриваются коцепи с конечным носителем, то есть, равные нулю на всех клетках, кроме конечного числа.

Легко видеть, что определено спаривание Кронекера между когомологиями с компактными носителями и гомологиями Бореля–Мура с локально конечными носителями $H_c^n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_n^{lf}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ (так как локально конечная цепь конечна на каждом компакте). Можно показать, что для локально конечного, не более, чем счётного, конечномерного клеточного пространства X имеет место формула универсальных коэффициентов

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_c^{n+1}(X), \mathbb{Z}) \rightarrow H_n^{lf}(X) \rightarrow \text{Hom}(H_c^n(X); \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

(заметим, что тут гомологии Бореля–Мура выражаются через когомологии с компактными носителями; в этой теории когомологии более фундаментальны и ведут себя лучше, чем гомологии).

27.* Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, но не обязательно коммутативное. Тогда можно определить левые и правые модули над R . Их определения аналогичны определению модуля над коммутативным кольцом, за исключением «аксиомы ассоциативности»: для левых модулей умножение на скаляры пишется слева и аксиома имеет вид $r_1 \cdot (r_2 \cdot m) = (r_1 r_2) \cdot m$, а для правых модулей умножение на скаляры пишется справа и аксиома имеет вид $(m \cdot r_1) \cdot r_2 = m \cdot (r_1 r_2)$ (Заметьте, что тут дело не только в написании скаляров слева или справа, если даже их писать слева, получатся разные аксиомы: для левых модулей — $r_1(r_2 m) = (r_1 r_2)m$, а для правых модулей — $r_2(r_1 m) = (r_1 r_2)m$.)

Тогда для левых модулей M и N можно определить абелеву подгруппу $\text{Hom}_R(M, N) := \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \mid f(rm) = rf(m)\}$ в $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ (и аналогично для правых модулей).

Для правого модуля M и левого модуля N можно определить абелеву факторгруппу $M \otimes_R N := M \otimes_{\mathbb{Z}} N / (mr \otimes n - m \otimes rn)$.

Убедитесь, что в этих абелевых группах, вообще говоря, нет естественной структуры R -модуля, если R некоммутативно.

Тогда можно аналогично определить проективные (левые и правые) модули, проективные резольвенты и функторы $\text{Tor}_i^R(M, N)$ (для правого модуля M и левого модуля N) и $\text{Ext}_R^i(M, N)$ (для одновременно левых (или правых) модулей M и N). Заметьте, что для некоммутативного R эти функторы принимают значения, вообще говоря, в абелевых группах.

Для любой группы G можно определить групповое кольцо $\mathbb{Z}[G]$, состоящее из (конечных) формальных сумм $\sum n_g g$, $n_g \in \mathbb{Z}$, и на котором умножение определяется по линейности из умножения на G .

Рассмотрим клеточное пространство X и его накрытие Галуа $\hat{X} \rightarrow X$ с группой Галуа G . Группа G действует (слева) на $\hat{X}$, и следовательно, на сингулярных цепях $C_*(\hat{X})$, превращая их в (левый) $\mathbb{Z}[G]$ -модуль. Аналогично на $C^*(\hat{X}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(\hat{X}), \mathbb{Z})$ возникает структура (правого) $\mathbb{Z}[G]$ -модуля.

а) Рассмотрим абелеву группу M как правый $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с тривиальным действием: $m \cdot g = m$ для $g \in G$, $m \in M$. Докажите, что тогда $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C_*(\hat{X}) \cong C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M$ и $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_*(\hat{X}), M) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X), M)$ (как абелевы группы).

В частности, для универсального накрытия $\tilde{X} \rightarrow X$ группа Галуа равна $\pi = \pi_1(X)$ и мы получаем равенства $M \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C_*(\tilde{X}) \cong C_*(X; M)$ и $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi]}(C_*(\tilde{X}), M) \cong C^*(X; M)$.

Вообще, для произвольного π -модуля M определены (ко)гомологии $H^k(X; M) := H^k(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi]}(C^*(\tilde{X}), M))$ и $H_k(X; M) := H_k(C_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} M)$. Они называются (ко)гомологиями с локальными коэффициентами пространства X (потому что их можно также определить в терминах (ко)гомологий пространства X с коэффициентами, зависящими от точки $x \in X$). Из предыдущего абзаца, мы получаем, что для тривиального π -действия на M они совпадают с обычными (ко)гомологиями.

б) Докажите, что если рассмотреть кольцо $\mathbb{Z}[\pi]$ как одномерный свободный модуль над самим собой, то гомологии с такими локальными коэффициентами изоморфны просто $H_*(\tilde{X}; \mathbb{Z})$. Докажите, что, если X конечно, то когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}[\pi]$ изоморфны $H_c^*(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ (когомологиям с компактными носителями).

в) Докажите, что $\text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^k(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong H^k(K(G, 1); \mathbb{Z})$ и $\text{Tor}_k^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong H_k(K(G, 1); \mathbb{Z})$

28.* Пусть X — связное клеточное пространство, $A \subset X$ — его связное клеточное подпространство, а Y — линейно связное пространство, у которого $\pi_1(Y)$ тривиально действует на $\pi_n(Y)$ для некоторого фиксированного $n \geq 1$ (в частности, если $n =$

1, то $\pi_1(Y)$ абелева, и в $\pi_n(Y)$ можно не писать отмеченные точки). Пусть задано отображение $f: A \cup X^n \rightarrow Y$, где X^n — n -остов.

Для каждой клетки e_α^{n+1} из $X - A$ рассмотрим её приклеивающее отображение $\varphi_\alpha: S^n \rightarrow X^n$. Мы получаем элементы $[f_\alpha] = [f \circ \varphi_\alpha] \in \pi_n(Y)$. Тогда корректно определена клеточная коцепь $\omega(f) \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{n+1}^{CW}(X, A), \pi_n(Y))$, переводящая клетку $[e_\alpha^{n+1}]$ в $[f_\alpha] \in \pi_n(Y)$.

а) Убедитесь, что $\omega(f) = 0 \iff f$ можно продолжить до отображения $X^{n+1} \rightarrow Y$. Докажите, что эта коцепь $\omega(f)$ является клеточным коциклом.

б) Аналогично, если заданы два отображения $f, g: X^n \cup A \rightarrow Y$ и их ограничения $f|_{X^{n-1}}$ и $g|_{X^{n-1}}$ гомотопны неподвижно на A , то эта гомотопия H вместе с f и g даёт отображение $X^n \times 0 \cup A \times I \cup X^{n-1} \times I \cup X^n \times 1 = (X \times I)^n \cup A \times I \rightarrow Y$. Применяя аналогичную конструкцию к клеткам вида $e_\alpha^{n-1} \times I$ для $e_\alpha^{n-1} \subset X - A$, мы получаем клеточную коцепь $d(f, g, H) \in C_{CW}^{n-1}(X, A; \pi_n(Y))$.

Докажите, что в таком случае $\delta d(f, g, H) = \omega(f) - \omega(g)$ ($\delta = (\partial_{CW})^*$ — клеточный коцепной дифференциал).

в) Докажите, что $[\omega(f)] = 0$ в $H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y)) \iff$ сужение $f|_{X^{n-1}} \rightarrow Y$ продолжается до отображения $X^{n+1} \rightarrow Y$ (иными словами, f продолжается на X^{n+1} после возможного изменения на n -остове).

В частности, мы получаем следующее. Пусть даны два отображения $f, g: X^n \cup A \rightarrow Y$ и гомотопия H между их ограничениями $f|_{X^{n-1}}$ и $g|_{X^{n-1}}$ (неподвижная на A). Тогда мы получаем отображение $F: X^n \times 0 \cup A \times I \cup X^{n-1} \times I \cup X^n \times 1 = (X \times I)^n \cup A \times I \rightarrow Y$. Если мы хотим продолжить эту гомотопию на $X^n \times I$, то соответствующий препятствующий класс когомологий $\omega(F)$ лежит в $H^{n+1}(X \times I, X \times 0 \cup A \times I \cup X \times 1; \pi_n(Y)) \cong \cong H^{n+1}(X \times I / (X \times 0 \cup A \times I \cup X \times 1); \pi_n(Y)) = H^{n+1}(\Sigma X / \Sigma A; \pi_n(Y)) = H^{n+1}(\Sigma(X/A); \pi_n(Y)) \cong H^n(X, A; \pi_n(Y))$. Таким образом мы получили класс $\omega(F) \in H^n(X, A; \pi_n(Y))$ и он равен нулю $\iff$ ограничение гомотопии $H|_{X^{n-2} \times I}$ продолжается до гомотопии между f и g (неподвижной на A).

г) Рассмотрим пространство Эйленберга–Маклейна $K(A, n)$ с абелевой A . Убедитесь, что из теорем Гуревича и об универсальных коэффициентах следует, что имеется канонический изоморфизм $H^n(K(A, n); A) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, A)$. Рассмотрим элемент $\iota_A^n \in H^n(K(A, n); A)$, соответствующий при этом изоморфизме $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, A)$.

Тогда для любого X корректно определено естественное отображение множеств

$$[X, K(A, n)] \rightarrow H^n(X; A), \quad [f] \mapsto f^*(\iota_A^n)$$

Докажите, что для клеточного X это отображение является биекцией.

Кроме того, так как пространство $K(A, n)$ слабо эквивалентно $\Omega K(A, n+1)$ (задача 10 второго листочка), то для любого клеточного пространства X имеет место биекция $[X, K(A, n)] \cong [X, \Omega K(A, n+1)]$ (задача 7 второго листочка). Но на множестве справа есть естественная структура группы, приходящая из умножения на пространстве петель. То есть, мы получаем естественную структуру группы на множестве $[X, K(A, n)]$.

д) Докажите, что биекция $[X, K(A, n)] \rightarrow H^n(X; A)$ является изоморфизмом групп.