

**Независимый Московский Университет,
Двойственность Понтрягина, осень 2025**

5

5.1. Сколько слагаемых N ряда $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$, надо взять, чтобы вычислить эту сумму с точностью до миллионных? Пользуясь доступными вам средствами, проверьте равенство $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ с точностью до миллионных.

5.2. Введите для положительного натурального $n \in \mathbb{N}$ множество

$$\text{COPRIME}_n := \{(a, b) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} | a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\}$$

пар взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих n . Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\text{COPRIME}_n}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Найдите такое N , что при любом натуральном $n > N$

$$.6 < \frac{\#\text{COPRIME}_n}{n^2} < .62$$

5.3. Докажите тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \equiv - \int_0^x \frac{\log(1-t)dt}{t}$$

при $0 \leq x < 1$. Обоснуйте законность почленного интегрирования.

5.4. Подробно докажите тождество Эйлера

$$\sin(\pi x) \equiv \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + \frac{(\pi x)^5}{5!} \dots \equiv \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \dots$$

(а) Применив "формулы Виета" к этому тождеству, вычислите несколько $\zeta(2k)$ для положительных натуральных k . Проверьте результаты численно.

(б) Взяв *логарифмическую производную* тождества, вычислите *производящую функцию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) x^{2k}.$$

(в) Исходя из дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dy} \text{ctg } y = -1 - \text{ctg}^2 y,$$

выведите рекурренцию для последовательности $\zeta(2k)$ при положительных натуральных k . Сопоставьте результаты с пунктом (а).

30 октября, Г.Б. Шабат