

**Независимый Московский Университет,
Двойственность Понтрягина, осень 2025**

7

В задачах **(7.1)-(7.3)** $\mathbb{k}$ – поле с *неархимедовой* нормой $x \mapsto |x|$.

7.1. Для $0 < |t| < 1$ рассмотрите ряд

$$x(w) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{t^m w}{(1 - t^m w)^2} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{(1 - t^m)^2} \quad (1),$$

где w – ненулевая переменная в $\mathbb{k}$. Докажите, что он абсолютно и равномерно сходится в любом множестве

$$\left\{ w \in \mathbb{k} \mid \left[r_1 < |w| < r_2 \right] \wedge [|w - t^m| \geq \varepsilon \text{ при всех } m \in \mathbb{Z}] \right\},$$

где $0 < r_1 < r_2$ и $\varepsilon > 0$.

7.2. Докажите, что построенная в предыдущей задаче функция удовлетворяет функциональному уравнению $x(tw) = x(w) = x(w^{-1})$.

7.3. Проверьте тождество

$$x(w) = \frac{1}{w + w^{-1} - 2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^n}{1 - t^n} (w^n + w^{-n} - 2)$$

при $|t| < |w| < |t|^{-1}$.

Далее $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

7.4. Придайте смысл равенству

$$\wp(u) = x(e^u) + \frac{1}{12}.$$

7.5. Докажите, что при $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ в стандартных обозначениях

$$g_2 = \frac{1}{12} + 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 t^n}{1 - t^n}, \quad g_3 = -\frac{1}{216} + \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 t^n}{1 - t^n}.$$

Здесь подразумевается решётка, порождённая $\lambda_1 = 2\pi i$ и $\lambda_2 = \log t$.

7.6. Докажите, что при $\mathbb{k} = \mathbb{C}$

$$\wp'(u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{t^m w}{(1 - t^m w)^2} + 2 \frac{(t^m w)^2}{(1 - t^m w)^3} \right) = x(w) + 2y(w),$$

где

$$y(w) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{(t^m w)^2}{(1 - t^m w)^3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{(1 - t^m)^2}.$$

7.7. Проверьте равенство $y^2 + xy = x^3 - b_2 x - b_3$, где

$$b_2 = \frac{1}{4} \left(g_2 - \frac{1}{12} \right) = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 t^n}{1 - t^n}$$

$$b_3 = \frac{1}{4} \left(g_3 - \frac{g_2}{12} - \frac{1}{432} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^5 + 5n^3}{12} \right) \frac{t^n}{1 - t^n}$$

12 ноября, Г.Б. Шабат