

1. ☐ а) Докажите, что эндоморфизмы абелевой группы образуют кольцо относительно операций суммы и композиции. б) Вычислите это кольцо для группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и найдите делители нуля и нильпотенты этого кольца (делители нуля – это ненулевые элементы, которые в произведении с каким-нибудь ненулевым элементом дают 0. Нильпотенты – это элементы, которые в какой-нибудь степени дают 0).

2. ☐ Рассмотрим подмножество $R \subset \mathbb{Q}$, состоящее из дробей вида $\frac{m}{p^n}$ для некоторого простого p . а) Докажите, что оно является подкольцом. б) Опишите все идеалы этого кольца. Какие из них простые/максимальные?

3. ☐ Пусть R – (ассоциативное) кольцо из конечного числа элементов. Докажите, что а) если R не имеет делителей нуля, то оно имеет единицу, и все его ненулевые элементы обратимы; б) если R имеет единицу, то любой его элемент, имеющий односторонний обратный, имеет и двусторонний обратный; в) если R имеет единицу, то любой левый делитель нуля является и правым делителем нуля (и наоборот).

Далее все кольца предполагаются коммутативными, ассоциативными и с единицей.

4. ☐ а) Докажите, что $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ это поле. Оно называется полем комплексных чисел. б) Пусть $f(x)$ – другой неприводимый многочлен степени 2 над $\mathbb{R}$. Докажите, что $\mathbb{R}[x]/(f(x))$ изоморфно полю комплексных чисел.

5. ☐ Докажите, что любой автоморфизм кольца многочленов над полем $\mathbb{Q}$ задаётся формулой $t \mapsto at + b$, где $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}$ (аналогичный факт верен над любым полем, если дополнительно потребовать, что на константах автоморфизм тождественный).

6. ☐ а) Пусть $R \rightarrow R'$ – сюръективный гомоморфизм колец. Докажите, что если R – кольцо главных идеалов, то и R' тоже. Верно ли обратное? б) Докажите, что в целостном кольце главных идеалов любой ненулевой простой идеал максимален.

7. ☐ Пусть I, J – идеалы кольца R . Определим множество $(I : J) = \{r \in R \mid rJ \subset I\}$. Докажите, что (далее все объекты – идеалы в R) а) это идеал; б) $I \subset (I : J)$; в) $(I : J)J \subset I$, г) $((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$; д) $(\bigcap_i I_i : J) = \bigcap_i (I_i : J)$; е) $(I : \sum_i J_i) = \bigcap_i (I : J_i)$.

8. ☐ а) Докажите, что все нильпотентные элементы образуют идеал (он называется нильрадикалом). б) Докажите, что нильрадикал лежит в пересечении всех простых идеалов. в) Докажите, что фактор по нильрадикалу не содержит нильпотентов. г) Верно ли, что нильрадикал совпадает с пересечением всех простых идеалов?

9. ☐ а) Пусть элемент a нильпотентен. Докажите, что элемент $1 - ax$ обратим для любого x (в частности, $1 + a$ обратим). б) Радикал Джекобсона это пересечение всех максимальных идеалов. Докажите, что элемент a принадлежит радикалу Джекобсона тогда и только тогда, когда $1 - ax$ обратим для любого x .