Линейные пространства

Задача 1.1. Можно ли задать структуру линейного пространства
а) над каким-либо полем на абелевой группе $\mathbb{Z}$ целых чисел;
б) над $\mathbb{R}$ на вещественных числах $\mathbb{R}$ со следующей операцией умножения на скаляры: $\lambda \cdot u = \lambda^2 u$;
в) над $\mathbb{R}$ на вещественных числах $\mathbb{R}$ со следующей операцией умножения на скаляры: $\lambda \cdot u = \lambda^3 u$?

Задача 1.2. Рассмотрим $\mathbb{R}$ как линейное пространство над $\mathbb{Q}$.
а) Докажите: векторы 1 и ξ линейно независимы тогда и только тогда, когда ξ иррационально.
б) Принадлежит ли $\sqrt[6]{2}$ линейной оболочке векторов 1, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[4]{2}$?

Задача 1.3. Пусть $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\ldots$ — многочлены с вещественными коэффициентами, причём $\deg P_n(x) \le n$. При каких условиях на коэффициенты эта последовательность является базисом пространства $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов?

Задача 1.4. Докажите, что в пространстве $\widehat{\mathbb{R}}^\infty$ всех бесконечных последовательностей вещественных чисел не существует счётного базиса.

Задача 1.5. Пусть U, V, W — подпространства в $\mathbb{R}^n$, причём $U \cap V = V \cap W = U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Верно ли, что $\dim(U + V + W) = \dim U + \dim V + \dim W$?

Суммой нескольких подпространств $V_1, \ldots, V_n$ линейного пространства V называется линейная оболочка их объединения:

$$V_1 + \ldots + V_n = \langle V_1 \cup \ldots \cup V_n \rangle.$$

Задача 1.6 (прямая сумма двух подпространств). Сумма двух подпространств $V_1 + V_2$ называется *прямой* (обозначение: $V_1 \oplus V_2$), если для любого вектора $\boldsymbol{v} \in V_1 + V_2$ представление $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$ и $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$, единственно. Докажите эквивалентность следующих условий:
а) сумма $V_1 + V_2$ прямая; б) $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$;
в) если $\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$ и $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$, то $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$; г) $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2)$.

Задача 1.7 (прямая сумма нескольких подпространств). Сумма подпространств $V_1 + \ldots + V_n$ называется *прямой*, если для любого вектора $\boldsymbol{v} \in V_1 + \ldots + V_n$ представление $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_n$, где $\boldsymbol{v}_i \in V_i$, единственно.

Убедитесь, что условия $V_i \cap V_j = \{\mathbf{0}\}$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$ не являются достаточными для того, чтобы сумма $V_1 + \ldots + V_n$ была прямой. Докажите эквивалентность следующих условий:
а) сумма $V_1 + \ldots + V_n$ прямая; б) $V_i \cap (V_{i+1} + \ldots + V_n) = \{\mathbf{0}\}$ для любого $i = 1, \ldots, n-1$;
в) $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_n) = \{\mathbf{0}\}$ для любого $i = 1, \ldots, n$;
г) если $\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_n$, где $\boldsymbol{v}_i \in V_i$, то $\boldsymbol{v}_1 = \ldots = \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$;
д) $\dim V_1 + \ldots + \dim V_n = \dim(V_1 + \ldots + V_n)$.

Задача 1.8. Составьте систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов в координатном пространстве:
а) $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 3)$; б) $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 3)$, $(3, -5, 7, 2)$, $(1, -7, 5, -2)$.

Задача 1.9. Найдите размерности и базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2:
а) $L_1 = \langle (1, 2, 3), (4, 3, 1), (2, -1, -5) \rangle$, $L_2 = \langle (1, 1, 1), (-3, 2, 0), (-2, 3, 1) \rangle$;
б) $L_1\colon x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0$, $L_2 = \langle (1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, 1, -1), (0, 1, -1, -1, 1), (-2, 1, 0, 1, -1) \rangle$;
в) $L_1\colon \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$ $L_2\colon \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0. \end{cases}$

Задача 1.10. Докажите, что базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ линейного пространства над $\mathbb{R}$ одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда существует деформация $\boldsymbol{e}(t)$ базиса $\boldsymbol{e}$, для которой $\boldsymbol{e}(1) = \boldsymbol{e}'$.