Листок 8, 7 апреля 2025 г.

Задача 1. Пусть V – конечномерное пространство над полем $\mathbb{C}$. Найдите размерности пространств симметрических форм на V; кососимметрических форм на V (в характеристике, отличной от 2); эрмитовых форм на V; косоэрмитовых форм на V.

Задача 2. Пусть g – невырожденная билинейная форма на конечномерном пространстве V. Докажите, что $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис V тогда и только тогда, когда матрица $g(e_i, e_j)$ невырождена.

Задача 3. Пусть g – билинейная форма на пространстве V. Докажите, что $g(u, v) = 0 \iff g(v, u) = 0$ для любых $u, v \in V$ тогда и только тогда, когда g либо симметрическая, либо знакопеременная.

Задача 4. Пусть g – билинейная симметрическая форма на решетке $M = \mathbb{Z}^n$.

1. Верно ли, что g приводится к диагональному виду в некотором базисе M?
2. Пусть g имеет в некотором базиес матрицу Грама $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Может ли g иметь в другом базисе матрицу Грама $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?
3. Существуют ли положительно определенная билинейная симметрическая форма g на $M = \mathbb{Z}^n$ такая, что определитель ее матрицы Грама равен 1, для некоторого $v \in M$ значение $g(v, v)$ нечетно, но $g(v, v) \neq 1$ ни для какого $v \in M$?

Задача 5. Докажите, что

1. $S^n(U \oplus V) = \oplus^{p+q=n} S^p U \otimes S^q V$,
2. $\Lambda^n(U \oplus V) = \oplus^{p+q=n} \Lambda^p U \otimes \Lambda^q V$,
3. $\det(U \oplus V) = \det U \det V$,
4. $S^n(V^*) = (S^n V)^*$, $\Lambda^n(V^*) = (\Lambda^n V)^*$,
5. $\Lambda^n V \otimes \det V^* = \Lambda^{N-n}$, где $\dim V = N$,
6. $S^\bullet(U \oplus V) = S^\bullet U \otimes S^\bullet V$,
7. $\Lambda^\bullet(U \oplus V) = \Lambda^\bullet U \otimes \Lambda^\bullet V$,
8. если $\dim V = n$, то $S^\bullet V^* = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Задача 6. Постройте симметрическую и внешнюю степени для модулей над произвольным коммутативным кольцом.

Задача 7. Докажите, что $T^n \to S^n$ и $T^n \to \Lambda^n$ – морфизмы функторов.

Задача 8. Докажите, что $T^2 V \simeq S^2 V \oplus \Lambda^2 V$. Постройте аналогичное разложение для $T^3 V$.