

НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9.
Риманова геометрия. Геодезические. 14.05.2025.

Задача 1. Если ∇ связность в TM , то она продолжается до связностей во всех расслоениях $T_q^p M$. Риманова метрика g является тензором типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Доказать, что ∇ согласована с метрикой g тогда и только тогда, когда $\nabla g = 0$.

Задача 2. Доказать, что для n -мерной сферы $S_r^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r тензор Римана выражается формулой $R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2} (<Y, Z>X - <X, Z>Y)$, а секционная кривизна постоянна, и равна $K = 1/r^2$.

Задача 3. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R_{12,2}^1$. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество $S = \frac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

Задача 4. Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивита ∇ является симметрическим, $\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X)$.

Задача 5. Доказать, что для симметричной связности ∇ имеет место тождество Бианки $(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) = 0$, где X, Y, Z и V векторные поля. В компонентах это тождество имеет вид $\nabla_m R_{ij,k}^l + \nabla_i R_{jm,k}^l + \nabla_j R_{mi,k}^l = 0$.

Задача 6. Пусть M риманово многообразие, а ∇ — связность Леви-Чивиты. Определим гессиан гладкой функции по формуле $\text{Hess } f = \nabla df$. Ясно, что это билинейная форма. Докажите, что она симметрична и найдите выражение для $\text{Hess } f(X, Y)$ в локальных координатах и в «безкоординатном» виде, то есть выразив через дифференциал и ковариантные производные.

Пусть M подмногообразие риманова многообразия $\tilde{M}$, на котором мы рассматриваем индуцированную метрику. Пусть f — гладкая функция на $\tilde{M}$. Найдите соотношение, связывающее гессиан на M ограничения $f|_M$ с гессианом f на $\tilde{M}$ и другими геометрическими объектами.

Задача 7. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского как непараметризованные кривые. Можно взять любую из моделей плоскости Лобачевского, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Указание. Очевидно, что $I_1 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$ является первым интегралом. Докажите, что есть второй первый интеграл $I_2 = x + \frac{\dot{y}}{x}y$ и с его помощью найдите $y(x)$.

Задача 8. Докажите, что при достаточно малых $\delta > 0$ геодезическая $\exp_A tv$ и называемое геодезической сферой радиуса δ с центром в точке A подмногообразие $\exp_A(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_A M \mid |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

Задача 9. Рассмотрим геодезические координаты $x^1, \dots, x^n$ на римановом многообразии, центрированные в точке A , то есть определённые с помощью отображения $\exp_A$. Доказать, что в этих геодезических координатах геодезические, проходящие через точку A , имеют вид $x^i = a^i t$, где a^i — некоторые константы. Доказать, что в геодезических координатах символы Кристоффеля в точке A обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Доказать, что центрированные в точке A координаты $x^1, \dots, x^n$, то есть такие координаты, что $A = (0, \dots, 0)$, определённые в окрестности $U \ni A$, являются геодезическими координатами, центрированными в точке A , тогда и только тогда, когда $\Gamma_{jk}^i x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \dots, x^n$ в U .

Задача 10. Доказать, что геодезические в произвольной перепараметризации, лежащие на многообразии M и проходящие через заданные точки A и B , совпадают с экстремалами функционала длины $L[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt$, где $\gamma(t_0) = A, \gamma(t_1) = B$.