

Семинар 10 (24 апреля). Последний.

Задача 1. (а) Покажите, что для корней $\alpha, \beta \in R$ множество $\{\beta + k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap R$ имеет вид $\beta + p\alpha, \beta + (p-1)\alpha, \dots, \beta - q\alpha$, причём $\beta + p\alpha = s_\alpha(\beta - q\alpha)$. Как следствие, $p - q = -\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = -2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$. Назовём это множество α -струной, проходящей через β .

(б) Придумайте алгоритм восстановления системы корней по матрице Картана. *Подсказка: сначала постройте все корни высоты 2, затем высоты 3, и т.д., анализируя, как выглядят струны, проходящие через построенные корни.*

Задача 2. Обозначим $s_i = s_{\alpha_i}$ отражение, соответствующее простому корню α_i . Покажите, что в группе Вейля выполняются соотношения $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$, где $m_{ij} = 2, 3, 4, 6$, если в диаграмме Дынкина между вершинами $i, j - 0, 1, 2, 3$ ребра соответственно.

Замечание. На самом деле эти соотношения вместе с $s_i^2 = 1$ порождают все соотношения в группе Вейля, т.е. группа Вейля является группой Кокстера.

Задача 3. (а) Покажите, что $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$.

Проверьте, что

(б) $SL(2, \mathbb{C}) \cong Sp(2, \mathbb{C})$,

(в) $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(3, \mathbb{C})$, заданное присоединённым действием $SL(2, \mathbb{C})$ на своей алгебре Ли с квадратичной формой $\det$ – двулистное накрытие,

(г) $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(4, \mathbb{C})$, заданное левым и правым умножением на пространстве всех комплексных матриц 2×2 с формой $\det$ – двулистное накрытие,

(д) Зададим отображение $Sp(4, \mathbb{C}) \rightarrow SO(5, \mathbb{C})$ следующим образом. Рассмотрим на 6-мерном пространстве $\Lambda^2 \mathbb{C}^4$ естественную симметричную форму $\Lambda^2 \mathbb{C}^4 \otimes \Lambda^2 \mathbb{C}^4 \rightarrow \Lambda^4 \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{C}$, заданную внешним умножением. Действие $Sp(4, \mathbb{C})$ на $\Lambda^2 \mathbb{C}^4$ сохраняет её. Поскольку элемент $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ неподвижен при действии $Sp(4, \mathbb{C})$, то она действует на 5-мерном ортогональном дополнении к $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$. Это – двулистное накрытие $Sp(4, \mathbb{C}) \rightarrow SO(5, \mathbb{C})$.

Задача 4. Если R – система корней, то двойственной к ней системой называется множество $R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$, где $\alpha^\vee = 2 \frac{\alpha}{(\alpha, \alpha)}$.

(а) Нарисуйте $R^\vee$ для систем ранга 2.

(б) Покажите, что $R^\vee$ – действительно система корней.

(в) Как связаны диаграммы Дынкина R и $R^\vee$?