

НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 4.
Параллельный перенос и геодезические. 19.03.2025.

Задача 1. Доказать, что если две поверхности в \mathbb{E}^3 касаются вдоль кривой (то есть в точках кривой касательные плоскости к поверхностям совпадают), то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Доказать, что если две поверхности в \mathbb{E}^3 касаются вдоль кривой, которая геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Задача 2. Доказать, что если две поверхности в \mathbb{E}^3 пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают (в такой ситуации говорят, что поверхности пересекаются трансверсально), то эта кривая является прямой.

Задача 3. Найти оператор переноса на прямом круговом цилиндре в \mathbb{R}^3 . Как он зависит от кривой?

На какой угол повернётся касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели $\psi = \psi_0$ на угол α ?

Указание: чтобы сформулировать ответ, выберите разумный базис в векторных полях.

Задача 4. Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

Указание: чтобы сформулировать ответ, выберите разумный базис в векторных полях.

Задача 5. Доказать, что если прямая лежит на поверхности, то она будет геодезической на этой поверхности.

Доказать, что геодезическими на k -плоскости \mathbb{E}^k в евклидовом пространстве \mathbb{E}^n являются в точности прямые.

Задача 6. Найти геодезические на сфере, цилиндре, круговом конусе (все три поверхности в \mathbb{E}^3).

Задача 7. Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

Задача 8. Описать геодезические на поверхности вращения, получив соотношение между r и α , где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 9. Найти на круговом конусе самопересекающиеся геодезические.
Указание: рассмотрите развёртку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.

Задача 10*. Доказать, что геодезические в произвольной параметризации, лежащие на поверхности M и проходящие через заданные точки A и B , совпадают с экстремальными функционала длины

$$L[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt,$$

где $\gamma(t_0) = A$, $\gamma(t_1) = B$. Это утверждение обобщает свойство прямой быть кратчайшей, соединяющей две заданные точки.