Листок 4, 3 марта 2025 г.

Задача 1. Докажите, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда ряд, составленный из последовательных коммутантов $G_s = G^{(s)}$ сходится к тривиальной группе.

Задача 2. Докажите, что группы A_n и S_n неразрешимы при $n \geqslant 5$.

Задача 3. Докажите, что общее уравнение степени $\geqslant 5$ неразрешимо в радикалах.

Задача 4. Пусть $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ – сепарабельное расширение, и $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ – все различные вложения $\mathbb{L} \to \overline{\mathbb{K}}$. Определим норму и след элементов $\mathbb{L}$ выражениями

$$\mathrm{N}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} = \prod_{k=1}^{n} \sigma_k(\beta), \qquad \mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\beta).$$

1. Докажите, что норма является гомоморфизмом $\mathrm{N}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} \colon \mathbb{L}^\times \to \mathbb{K}^\times$, а след – гомоморфизмом $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} \colon \mathbb{L} \to \mathbb{K}$.
2. Если то $\mathrm{N}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(a) = a^n$, $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(a) = na$.
3. Если $\mathbb{F} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ – башня сепарабельных расширений, то $\mathrm{N}_{\mathbb{L}/\mathbb{F}} = \mathrm{N}_{\mathbb{K}/\mathbb{F}} \circ \mathrm{N}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ и $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{F}} = \mathrm{Tr}_{\mathbb{K}/\mathbb{F}} \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$.
4. Вычислите $\mathrm{N}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ и $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ в случае, когда
$$\mathrm{Irr}_\alpha^{\mathbb{K}} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{K}, \qquad [\mathbb{L} : \mathbb{K}(\alpha)] = m.$$
5. Если положить
$$\mathrm{N}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} = \left(\prod_{k=1}^{r} \sigma_k(\beta)\right)^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]_i}, \qquad \mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]_i \sum_{k=1}^{r} \sigma_k(\beta),$$
то свойства (1)–(4) выполнены и для несепарабельных расширений.

Задача 5. Пусть $\mathrm{char} K = p > 0$. Пусть $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ – расширение полей такое, что $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) = \mathbb{Z}/n$, и $\beta \in \mathbb{L}^\times$. Докажите, что $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\beta) = 0$ тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in \mathbb{L}^\times$ такое, что $\beta = \alpha - \sigma(\alpha)$.