

ВШЭ, риманова геометрия. Листок 10.
Тензор Точки раздела, радиус инъективности. 24.04.2025.

Задача 1. Пусть риманово многообразие имеет постоянную секционную кривизну k . Доказать, что $R(X, Y)Z = k((X, Z)Y - (Y, Z)X)$.

Задача 2. Пусть M риманово многообразие, $p \in M$, $\xi \in T_p M$, $|\xi| = 1$. Пусть $c(\xi)$ расстояние от p до точки раздела на геодезической γ_ξ ,

$$c(\xi) = \sup\{t > 0 | d(p, \gamma_\xi(t)) = t\}.$$

Пусть $SM = \{\xi \in TM | |\xi| = 1\}$ сферизация касательного расслоения. Доказать, что $c : SM \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху. Доказать, что на полном римановом многообразии $c : SM \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Задача 3. Пусть

$$D_p^{TM} = \{t\xi | \xi \in T_p M, |\xi| = 1, 0 \leq t < c(\xi)\}, \quad D_p^M = \exp_p D_p^{TM}.$$

Доказать, что D_p^{TM} наибольшее звездное по отношению к $0 \in T_p M$ множество, для которого $\exp_p$, ограниченное на это множество, является диффеоморфизмом. Доказать, что $D_p^M = M \setminus C(p)$, где $C(p)$ множество точек раздела для p .

Задача 4. Пусть M риманово многообразие, $p \in M$. Определим радиус инъективности в точке p как

$$\text{inj } p = \inf\{c(\xi) | \xi \in T_p M, |\xi| = 1\}$$

и радиус инъективности многообразия M как

$$\text{inj } M = \inf\{\text{inj } p | p \in M\}.$$

Доказать, что а) $\text{inj } p > 0$, б) для компактного M его радиус инъективности $\text{inj } M$ больше нуля, в) функция $\text{inj} : M \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Задача 5. (Теорема Морса-Шёнберга). Пусть M риманово многообразие, $\gamma(t)$ геодезическая с $|\gamma'(t)| = 1$, и существует $\delta > 0$, такая, что в точках этой геодезической для $t \in [0, \beta]$ все секционные кривизны $K_\sigma \leq \delta$. Тогда если $\gamma(\beta)$ сопряжена с $\gamma(0)$ на этой геодезической, то $\beta \geq \pi/\delta$.

Задача 6. (Лемма Клингенберга). Пусть M полное риманово многообразие, $p \in M$ и $q \in C(p)$, причем $d(p, q) = d(p, C(p))$, то есть q ближайшая к p точка из множества раздела точки p . Если q не сопряжена с p вдоль минимальной геодезической, соединяющей p с q , то q является серединой геодезической петли, начинающейся и заканчивающейся в p . Если M компактно и существует $\delta > 0$, такая, что все секционные кривизны $K_\sigma \leq \delta$, то

$$\text{inj } M \geq \min\{\pi/\sqrt{\delta}, l(M)/2\},$$

где $l(M)$ длина кратчайшей простой замкнутой геодезической на M .