Анализ-2 НМУ, февраль-май 2025 гг.

Листок №12

(не входит в зачёт)

1) (к выводу ядра Дирихле) доказать, что

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos z = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}};$$

2) (вывод ядра Фейера) пусть σ_n – сумма Фейера функции f. Доказать, что

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_n(t) dt, \quad \text{где} \quad \Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \frac{1 - \cos(n+1)t}{1 - \cos t};$$

3) доказать, что если f и g принадлежат $L_2(X)$, то $\int_X |fg| d\mu$ существует, и $\int_X |fg| d\mu \leq \int_X |f|^2 d\mu \cdot \int_X |g|^2 d\mu$ (неравенство Шварца);

4) X – измеримое пространство. Доказать, что $L_2(X)$ – линейное пространство;

5) доказать, что $(f, g) = \int_X fg \, d\mu$ – скалярное произведение в $L_2(X)$;
комплексный вариант: $(f, g) = \int_X f\overline{g} \, d\mu$ – эрмитово скалярное произведение в $L_2(X)$;

6) система функций $\{1, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \,|\, n = 1, \ldots, \infty\}$ является ортонормальной в $L_2([-\pi, \pi])$. Соответствующий ряд Фурье функции f равен $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt;$$

План лекции №12. Ряды Фурье.

Ядро Дирихле. Условие сходимости ряда Фурье к функции в точке. Теорема Фейера. Пространство L_2. Сходимость ряда Фурье к функции в L_2.