3. Лекция 3. Касательная алгебра Ли.

3.1. **Определение коммутатора.** Пусть G группа Ли размерности n, $\mathfrak{g} = T_eG$ — её касательное пространство в единице. Так как G – группа, то на векторном пространстве $\mathfrak{g}$ возникает дополнительная структура *алгебры Ли.*

Пусть $(U, \psi\colon U \to \Bbbk^n)$ — такая карта, что $e \in U$ и $\psi(e) = 0 \in \Bbbk^n$. Выберем такую окрестность $V \subset U$, что для любых $x, y \in V$ имеем $xy \in U$. Обозначим через $\overline{x} = \psi(x), \overline{y} = \psi(y)$ координаты точек $x, y \in U$, а для $x, y \in V$ обозначим через $\overline{xy}$ координаты произведения, то есть $\psi(m(x, y))$. Рассмотрим формулу Тэйлора в единице произведения $x, y \in V$ в этих координатах:

$$\overline{xy} = C + l(\overline{x}, \overline{y}) + q(\overline{x}, \overline{y}) + o(q(\overline{x}, \overline{y})),$$

где $l\colon \Bbbk^n \times \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ – линейное отображение, каждая координатная функция которого имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k x_i + b_i^k y_i, k = 1, \dots, n$$

а $q\colon \Bbbk^n \times \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ — квадратичное отображение, каждая координатная функция которого имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^k x_i x_j + \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}^k y_i y_j + \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}^k x_i y_j, k = 1, \dots, n$$

Предложение 3.1. Координаты произведения имеют следующий вид

$$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y} + \alpha(\overline{x}, \overline{y}) + o(\alpha(\overline{x}, \overline{y})),$$

где $\alpha\colon \Bbbk^n \times \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ — *билинейное отображение.*

Доказательство. Пользуясь равенствами $\overline{x} \cdot \overline{e} = \overline{x}$ и $\overline{e} \cdot \overline{y} = \overline{y}$ для любых $x, y \in U$ получаем, что

$$a_i^k = b_i^k = \delta_{ik}, A_{ij}^k = B_{ij}^k = 0, k = 1, \dots, n.$$

□

Определим билинейное отображение

$$\gamma : \Bbbk^n \times \Bbbk^n \to \Bbbk^n, (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \alpha(\overline{x}, \overline{y}) - \alpha(\overline{y}, \overline{x}).$$

Заметим, что $\gamma(\overline{x}, \overline{y}) = -\gamma(\overline{y}, \overline{x})$. Отождествим $\mathfrak{g}$ с $\Bbbk^n$ при помощи отображения

$$d_e\psi\colon \mathfrak{g} \to \Bbbk^n.$$

Это позволяет определить билинейную кососимметрическую операцию на $\mathfrak{g}$:

$$[\xi, \eta] := (d_e\psi)^{-1}(\gamma(d_e\psi(\xi), d_e\psi(\eta)))\ \forall\, \xi, \eta \in \mathfrak{g},$$

которую будем называть *коммутатором.*

Отметим, что билинейная часть умножения в группе не является инвариантной, что легко увидеть на примере аддитивной группы $\mathbb{R}$. Действительно, в стандартной карте $\overline{x} = x$ имеем

$$m(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x} + \overline{y},$$

то есть билинейная часть нулевая. С другой стороны мы можем рассмотреть координату $\overline{x} = e^x - 1$, то

$$m(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x} + \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

Предложение 3.2. Коммутатор не зависит от выбора карты.

Доказательство. Рассмотрим групповой коммутатор $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$ элементов $x, y \in G$.

Лемма 3.3.

$$\overline{(x, y)} = \gamma(\overline{x}, \overline{y}) + o(\gamma(\overline{x}, \overline{y})).$$

Доказательство. Действительно, заметим, что $(x,y)yx = xy$. Имеем

$$\overline{(x,y)} \cdot \overline{yx} = \overline{(x,y)} + \overline{yx} + \alpha(\overline{(x,y)}, \overline{yx}) + o(\alpha(\overline{(x,y)}, \overline{yx})) =$$
$$\overline{(x,y)} + \overline{x} + \overline{y} + \alpha(\overline{y}, \overline{x}) + \alpha(\overline{(x,y)}, \overline{yx}) + o(\alpha(\overline{(x,y)}, \overline{yx}))$$

и одновременно

$$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y} + \alpha(\overline{x}, \overline{y}) + o(\alpha(\overline{x}, \overline{y})),$$

откуда следует, что

$$\overline{(x,y)} = \gamma(\overline{x}, \overline{y}) + o(\gamma(\overline{x}, \overline{y})).$$

□

Пусть (U_1, ψ_1) и (U_2, ψ_2) две карты в окрестности $e \in G$ такие, что координаты e в этих картах нулевые, γ_1, γ_2 — соответствующие билинейные функции и $[\cdot,\cdot]_1$ и $[\cdot,\cdot]_2$ — соответствующие коммутаторы. Пусть $\overline{x}$ — координаты элемента $x \in U_1$, а $\overline{\overline{y}}$ — координаты элемента $y \in U_2$. Пусть $C = d_e\psi_1 \circ (d_e\psi_2)^{-1}$ — матрица Якоби в единице первых координат относительно вторых. Тогда

$$\overline{x} = C\overline{\overline{x}} + o(\overline{\overline{x}}).$$

Тогда

$$\gamma_2(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) + o(\gamma_2(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})) = \overline{\overline{(x,y)}} = C^{-1}\overline{(x,y)} + o(\overline{\overline{(x,y)}}) = C^{-1}\gamma_1(\overline{x}, \overline{y}) + o(\gamma_2(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})) =$$
$$C^{-1}\gamma_1(C\overline{\overline{x}}, C\overline{\overline{y}}) + o(\gamma_2(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})).$$

Отсюда следует, что если $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, то

$$[\xi,\eta]_2 = (d_e\psi_2)^{-1}(\gamma_2(d_e\psi_2(\xi), d_e\psi_2(\eta))) = (d_e\psi_2)^{-1}(C^{-1}\gamma_1(Cd_e\psi_2(\xi), Cd_e\psi_2(\eta))) =$$
$$= (d_e\psi_1)^{-1}(\gamma_1(d_e\psi_1(\xi), d_e\psi_1(\eta)) = [\xi,\eta]_1.$$

□

Следствие 3.4. На касательном пространстве в единице группы Ли G имеется каноническая структура (неассоциативной) алгебры с билинейной операцией $[\cdot,\cdot]$. Мы будем называть касательное пространство T_eG с этой структурой касательной *алгеброй Ли* и обозначать соответствующей строчной готической буквой $\mathfrak{g}$.

Выберем базис $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ в $\mathfrak{g}$. Тогда

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k,$$

Числа c_{ij}^k называются *структурными константами* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, они зависят от выбора базиса. Если выбрана карта в окрестности единицы и базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующий стандартному базису $\Bbbk^n$, то

$$\gamma_k(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i,j} c_{ij}^k x_i y_j, k = 1, \dots, n$$

где γ_k – k-ая координата билинейного отображения γ.

Примеры. (1) Пусть G — абелева группа Ли. Тогда $[\cdot,\cdot] = 0$. Действительно, билинейная функция γ в этом случае нулевая.

(2) Пусть $G = GL_n(\Bbbk)$. Касательное пространство $T_eG = M_n(\Bbbk)$. Стандартный выбор координат на GL_n: $(x_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ это координаты матрицы $E + (x_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Это действительно задаёт координаты в окрестности единицы, так как $\det(E + (x_{ij})) \neq 0$ для достаточно малых $(\overline{x}_{ij})$. Тогда разложение произведения в окрестности E — конечно и выглядит так:

$$\overline{(E + (x_{ij}))(E + (y_{ij}))} = E + (x_{ij}) + (y_{ij}) + (x_{ij}) \cdot (y_{ij}),$$

где $\cdot$ — умножение матриц, то есть $\gamma((\overline{x}_{ij}),(\overline{y}_{ij})) = (\overline{x}_{ij}) \cdot (\overline{y}_{ij}) - (\overline{y}_{ij}) \cdot (\overline{x}_{ij})$.

Отображение, задающее карту $\psi\colon U \to \mathbb{R}^{n^2}$ отправляет $E + (x_{ij})$ в (x_{ij}), откуда следует, что $d_e\psi = \mathrm{id}$. Следовательно, для любых $A, B \in M_n(\Bbbk)$ имеем

$$[A, B] = AB - BA$$

Алгебра Ли группы Ли $GL_n(\Bbbk)$ обозначается через $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$.

3.2. **Гомоморфизм групп и коммутатор.**

Предложение 3.5. Пусть $\varphi\colon G_1 \to G_2$ — гомоморфизм групп Ли, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ соответствующие алгебры Ли. Тогда отображение $d_e\varphi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ сохраняет коммутатор, то есть

$$d_e\varphi([x,y]) = [d_e\varphi(x), d_e\varphi(y)],\ \forall\, x, y \in \mathfrak{g}_1$$

Доказательство. Из того, что φ — гомоморфизм групп Ли, следует, что

$$\varphi((x,y)) = (\varphi(x), \varphi(y)),\ \forall\, x, y \in G_1$$

Выберем карты (U_1, ψ_1) и (U_2, ψ_2) в окрестности единиц групп G_1 и G_2 соответственно, $\psi_1(e) = \psi_2(e) = 0$. Пусть $\overline{x}, \overline{\overline{y}}$ обозначают координаты в первой и второй карте соответственно. Тогда

$$\overline{\overline{\varphi(x)}} = C\overline{x} + o(\overline{x}),$$

где $C = d_0(\psi_2 \circ \varphi \circ \psi_1^{-1})$.

Тогда

$$\overline{\overline{(\varphi(x), \varphi(y))}} = \gamma_2(\overline{\overline{\varphi(x)}}, \overline{\overline{\varphi(y)}}) + o(\gamma_2(\overline{\overline{\varphi(x)}}, \overline{\overline{\varphi(y)}})) = \gamma_2(C\overline{x}, C\overline{y}) + o(\gamma_2(\overline{x}, \overline{y})),$$
$$\overline{\overline{(\varphi(x), \varphi(y))}} = \overline{\overline{\varphi((x,y))}} = C\overline{(x,y)} + o(\overline{(x,y)}) = C\gamma_1(\overline{x}, \overline{y}) + o(\gamma_1(\overline{x}, \overline{y})),$$

Это означает, что

$$C\gamma_1(\overline{x}, \overline{y}) = \gamma_2(C\overline{x}, C\overline{y})$$

Отсюда следует, что для любых $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}_1$

$$C\gamma_1(d_e\psi_1(\xi_1), d_e\psi_1(\xi_2)) = \gamma_2(d_e(\psi_2 \circ \varphi)(\xi_1), d_e(\psi_2 \circ \varphi)(\xi_2)).$$

Таким образом для любых $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}_1$

$$\begin{aligned}[d_e\varphi(\xi_1), d_e\varphi(\xi_2)] &= (d_e\psi_2)^{-1}\gamma_2(d_e(\psi_2 \circ \varphi)(\xi_1), d_e(\psi_2 \circ \varphi)(\xi_2)) = \\ &= d_e(\varphi \circ \psi_1^{-1})\gamma_1(d_e\psi_1(\xi_1), d_e\psi_1(\xi_2)) = d_e\varphi([\xi_1, \xi_2]).\end{aligned}$$

□

Определение 3.6. Подпространство алгебры Ли, замкнутое относительно операции коммутатора, называется подалгеброй Ли.

Следствие 3.7. Пусть H виртуальная подгруппа Ли группы Ли G и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — соответствующие алгебры Ли. Тогда $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим вложение

$$\mathrm{in}\colon H \to G.$$

Это гомоморфизм групп Ли. Тогда

$$d_e\mathrm{in}\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$$

является инъективным гомоморфизмом алгебр Ли, то есть $\mathfrak{h}$ подалгебра Ли $\mathfrak{g}$. □

Следствие 3.8. Для любой виртуальной подгруппы Ли $H \subset GL_n(\Bbbk)$ алгебра Ли $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Ли $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. В частности коммутатор задаётся той же формулой, что и в примере 2.

3.3. **Тождество Якоби.**

Теорема 3.9. Для любой группы Ли G операция коммутатора на пространстве $\mathfrak{g}$ удовлетворяет тождеству Якоби

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0\ \forall\, x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

Доказательство. Группа G действует на себе внутренними автоморфизмами:

$$\alpha\colon G\times G\to G,(g,h)\mapsto ghg^{-1}.$$

Это действие является гладким действием группы Ли G на себе. Рассмотрим отображение $C_g\colon G\to G, h\mapsto ghg^{-1}$. Это отображение является гладким как ограничение α на $\{g\}\times G$. Определим отображение $\operatorname{Ad}_g:=d_eC_g\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$. Заметим, что $\operatorname{Ad}_g:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ — обратимо, то есть автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Это позволяет определить отображение

$$\operatorname{Ad}\colon G\to GL(\mathfrak{g}), g\mapsto \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}},$$

которое называется присоединённым представлением группы Ли G.

Предложение 3.10. (1) Отображение $\operatorname{Ad}\colon G\to GL(\mathfrak{g})$ — гомоморфизм групп Ли.
(2) $\operatorname{ad}:=d_e\operatorname{Ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \operatorname{ad}(\eta)\xi=[\eta,\xi]$.

Доказательство. 1) Очевидно, что это гомоморфизм групп, так как

$$\operatorname{Ad}_{g_1}\circ\operatorname{Ad}_{g_2}=d_eC_{g_1}\circ d_eC_{g_2}=d_e(C_{g_1}\circ C_{g_2})=d_eC_{g_1g_2}=\operatorname{Ad}_{g_1g_2}.$$

Для проверки гладкости достаточно доказать гладкость в окрестности единицы.

Лемма 3.11. Пусть G и H – группы Ли и пусть $f:G\to H$ – гомоморфизм абстрактных групп. Если $f:G\to H$ – гладкое отображение в окрестности единицы $e\in G$, то оно является гладким.

Доказательство. Действительно, если f гладко в окрестности U единицы, то для любой точки $g\in G$ рассмотрим окрестность gU. Тогда

$$f|_{gU}=L_{f(g)}\circ f\circ L_{g^{-1}}.$$

□

Выберем такие окрестности $V\subset U$ единицы, что координаты единицы нулевые и $\alpha(V\times V)\subset U$. Пусть $\{x_1,\dots,x_n\}$ — координаты на U, а $\{y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_n\}$ — координаты на $V\times V$. Пусть $f_i(y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_n), i=1,\dots,n$ (гладкие) координатные функции отображения α. Пусть $g\in V$ и координаты g это $(y_1,\dots,y_n)$. Тогда матрица отображения $\operatorname{Ad}_g=d_eC_g$ в соответствующих выбору карты координатах на касательном пространстве имеет вид

$$\left(\frac{\partial f_i(y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_n)}{\partial z_j}|_{z_1=\ldots=z_n=0}\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Очевидно, что каждый матричный элемент — гладкая функция по первым n переменным, а значит Ad — гладкое отображение в окрестности единицы.

2) Рассмотрим следующие равенства

$$\overline{ghg^{-1}g}=\overline{(ghg^{-1})}+\overline{g}+\alpha(\overline{h},\overline{g})+o(\alpha(\overline{g},\overline{h})),$$

$$\overline{gh}=\overline{h}+\overline{g}+\alpha(\overline{g},\overline{h})+o(\alpha(\overline{g},\overline{h})).$$

Отсюда

$$\overline{(ghg^{-1})}=\overline{h}+\gamma(\overline{g},\overline{h})+o(\gamma(\overline{g},\overline{h})).$$

Это означает, что

$$f_k(\overline{y},\overline{z})=z_k+\gamma_k(\overline{y},\overline{z})+o(\gamma_k(\overline{y},\overline{z})),$$

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ – соответствующий выбору координат базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Напомним, что в этом случае
$$\gamma_k(e_m, e_s) = \sum_{m,s=1}^{n} c_{ms}^k y_m z_s,$$
где c_{ms}^k – это структурные константы алгебры Ли. Из явного вида матрицы отображения Ad получаем, что матрица $\mathrm{ad}(e_l)$ в этих координатах имеет вид
$$\left(\frac{\partial}{\partial y_l}\left(\frac{\partial f_i(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_n)}{\partial z_j}|_{\overline{z}=0}\right)|_{\overline{y}=0}\right)_{i,j=1,\ldots,n} = (c_{lj}^i)_{i,j=1,\ldots,n}$$
что в точности является матрицей оператора $[e_l,\cdot]$.

$\square$

Отображение $\mathrm{Ad}\colon G \to GL(\mathfrak{g})$ — гомоморфизм групп Ли. Тогда отображение $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ — гомоморфизм алгебр Ли. Отсюда следует, что для любых $x, y \in \mathfrak{g}$
$$\mathrm{ad}[x,y] = [\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y].$$
Заметим, что операция коммутатора в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ нам уже известна:
$$[\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y] = \mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y - \mathrm{ad}\, y \circ \mathrm{ad}\, x.$$
Пусть $z \in \mathfrak{g}$ и, зная, что ad — это коммутатор, распишем последнее равенство:
$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] + [y,[x,z]],\ \forall\, x,y,z \in \mathfrak{g}$$
Учитывая кососимметричность коммутатора, получаем тождество Якоби.

$\square$

Определение 3.12. Отображение
$$\mathrm{ad} = d_e\,\mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$
называется *присоединённым представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Примеры. (1) Группа Ли B нестрого верхнетрегольных матриц является открытым подмножеством векторного подпространства (следовательно, подмногообразия) в $M_n(\Bbbk)$ заданного системой уравнений $a_{21} = \ldots = a_{n-1,n} = 0$. Значит, касательное пространство в единице задаётся теми же уравнениями.

(2) Алгебра Ли группы Ли $SL_n(\Bbbk)$ задаётся условием $\mathrm{tr}\, X = 0$. Действительно, из рассуждений в лекции 1 следует, что дифференциал функции $\det X - 1$ в единице равен $\mathrm{tr}\, X$.

(3) Алгебру Ли группы $SO(n)$ можно получить как ядро дифференциала отображения
$$\alpha_e : SO_n(\Bbbk) \to Sym(M_n(\Bbbk)), A \mapsto AA^T,$$
см. теорему 1.11. Тогда $d_e\alpha_e : X \mapsto X + X^T$, следовательно алгебра Ли $\mathfrak{so}_n(\Bbbk)$ группы $SO_n(\Bbbk)$ состоит из кососимметрических матриц X, задаваемых условием $X = -X^T$.