

Листок 2, 17 февраля 2025 г.

**Задача 1.** Найдите группу Галуа  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q})$  и опишите все промежуточные подполя. То же самое для  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})/\mathbb{Q})$ .

**Задача 2.** Найдите группу Галуа многочленов  $x^2 + ax + b$ ,  $x^3 + ax + b$ ,  $x^p - a$ .

**Задача 3.** Докажите, что группа Галуа многочлена степени  $n$  является подгруппой симметрической группы  $S_n$ .

**Задача 4.** Докажите, что группа Галуа многочлена  $p(x) \in \mathbb{K}[x]$  степени  $n$  является подгруппой группы четных перестановок  $A_n$  тогда и только тогда, когда  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j) \in \mathbb{K}$ , где  $\alpha_i$  – корни многочлена  $p(x)$  в  $\bar{\mathbb{K}}$ .

**Задача 5.** Пусть  $\text{char}(\mathbb{K}) = p > 0$ ,  $p(x) = x^p + x + a$  – неприводим,  $\theta$  – корень  $p(x)$  в  $\bar{\mathbb{K}}$  и  $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\theta)$ . Докажите, что  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  – расширение Галуа. Найдите группу Галуа и опишите ее действие. Докажите, что любое расширение Галуа степени  $p$  имеет такой вид.