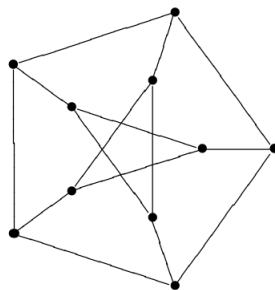


1. а) Пусть A и B — абелевы группы. Рассмотрим множество гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$. Определим на этом множестве операцию $(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$. Докажите, что множество гомоморфизмов является группой относительно этой операции. б) Найдите группу $\text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ для $m, n \geq 0$.
2. Пусть дана цепочка подгрупп $F \subset H \subset G$ (необязательно нормальных). Покажите, что $(G : F) = (G : H)(H : F)$.
3. а) Пусть теперь $F \subset H \subset G$, причём F и H нормальны в G . Докажите, что $G/H \simeq (G/F)/(H/F)$ (в частности, все факторы имеют смысл). б) Можно ли вместо нормальности F в G ограничиться требованием того, что F нормальна в H ?
4. а) Придумайте группу G и такие две её изоморфные подгруппы G_1 и G_2 , что $G/G_1 \not\simeq G/G_2$. б) Придумайте две неизоморфные группы, в которых есть изоморфные подгруппы с изоморфными факторами.
5. Докажите, что подстановки в S_n сопряжены тогда и только тогда, когда у них одинаковый тип разложения в независимые циклы (т.е. длины циклов одинаковые).
6. Найдите классы сопряжённых элементов в группе A_5 (достаточно указать по одному представителю из класса).
7. Докажите, что при $n > 2$, $n \neq 6$ имеется изоморфизм $\text{Aut}(S_n) \simeq S_n$, и все автоморфизмы внутренние (указание: при автоморфизме классы сопряжённости переходят в классы сопряжённости. Куда может перейти класс транспозиций?)
8. Докажите, что группа вращений куба изоморфна S_4 (указание: рассмотреть действие на некоторых элементах куба), а группа симметрий куба изоморфна $S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
9. Постройте сюръективный гомоморфизм $S_4 \rightarrow S_3$ и найдите его ядро.
10. Найдите порядок группы симметрий икосаэдра.
11. Найдите порядок группы автоморфизмов графа



12. Покажите, что этот граф можно построить таким образом: вершинами являются подмножества в $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ из трёх элементов, а соединены ребром они тогда и только тогда, когда у них ровно один общий элемент. Пользуясь этим, найдите группу симметрий этого графа.