Тензорные произведения векторных пространств.

Задача 1. Докажите, что $U^* \otimes V^*$ канонически вкладывается в $(U \otimes V)^*$, причём вложение – изоморфизм в случае конечномерных пространств, иначе – не изоморфизм. Выведите отсюда, что $U \otimes V \simeq \mathcal{L}(U, V; \Bbbk)^*$ в случае конечномерных векторных пространств.

Задача 2. В соответствии с изоморфизмом $Hom(U, V) \simeq U^* \otimes V$ запишем операторы $A : U \to V$ и $B : V \to W$ в виде $A = \sum \alpha_i \otimes a_i, B = \sum \beta_i \otimes b_i$, где $\alpha_i \in U^*, a_i \in V, \beta_i \in V^*, b \in W$. Запишите аналогичным образом произведение $BA \in \mathrm{Hom}(U, W) \simeq U^* \otimes W$.

Задача 3. Пусть $e_i, e_i^*, i = 1, \ldots n$ — двойственные базисы пространств V и V^* соответственно. В какой эндоморфизм пространства V переходит при изоморфизме $\mathrm{End}(V) \simeq V^* \otimes V$ тензор Казимира $\Omega = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i^*$?

Задача 4. Постройте для конечномерных пространств U, V, W канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U, V), W) \simeq Hom(V, U \otimes W).$$

Что можно сказать в случае бесконечномерных пространств?

Задача 5. Пусть $N : V \to V$ – нильпотентый оператор на конечномерном пространстве V. Выразите цикловой тип $N^{\otimes 2} : V \otimes V \to V \otimes V$ через цикловой тип N.

Задача 6. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V.
а) Выразите $\mathrm{tr}\, S^2\mathcal{A}$ и $\mathrm{tr}\, \Lambda^2\mathcal{A}$ через $\mathrm{tr}\, \mathcal{A}$.
б) Собственные значения $S^k\mathcal{A}$ и $\Lambda^k\mathcal{A}, k \geq 1$ через собственные значения $\mathcal{A}$.

Задача 7. Докажите, что $\exp(A \otimes E + E \otimes A) = \exp(A) \otimes \exp(A) \in M_{n^2}(\mathbb{C})$, где A произвольная, E – единичная матрица из $M_n(\mathbb{C})$.

Задача 8. **а)** Для любого векторного пространства V над полем характеристики $char(\Bbbk) \neq 2$ постройте канонический изоморфизм $V \otimes V^* \simeq S^2V \oplus \Lambda^2V$ и покажите, что $V \otimes V \otimes V \not\simeq S^3V \oplus \Lambda^3V$.
б) Явно предъявите тензор $t \in V^{\otimes 3}$, не являющийся суммой кососимметричного и симметричного.