Семинар 7 (3 апреля). Структурная теория алгебр Ли.

Задача 1. Вычислите верхний и нижний центральный ряд для алгебр (а) нестрого, (б) строго верхнетреугольных матриц.

(в) Проверьте критерий Картана разрешимости для алгебры нестрого верхнетреугольных матриц.

Задача 2. (а) Покажите, что комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима $\Leftrightarrow$ существует цепочка идеалов $\mathfrak{g} = I_n \supset I_{n-1} \supset \cdots \supset I_1 \supset I_0 = 0$, т.ч. I_k/I_{k-1} одномерны.
(б) Не пользуясь теоремой Энгеля, покажите, что $\mathfrak{g}$ разрешима $\Leftrightarrow$ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентна.

Задача 3. Пусть V – представление группы Ли G. G действует справа на пространстве билинейных форм на V по правилу $[B.g](v_1, v_2) = B(gv_1, gv_2)$. Покажите, что соответствующее действие $\mathfrak{g}$ на этом пространстве задаётся $[B.x](v_1, v_2) = B(xv_1, v_2) + B(v_1, xv_2)$. Покажите, что $B(gv_1, gv_2) = B(v_1, v_2) \Leftrightarrow B(xv_1, v_2) + B(v_1, xv_2) = 0$.

Задача 4. (а) Покажите, что алгебра Ли разрешима/нильпотентна $\Leftrightarrow$ её комплексификация такова.

Более общо, понятие разрешимости/нильпотентности инвариантно относительно расширения и сужения скаляров: если $\mathbb{K} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{L}$ – расширение полей, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над $\mathbb{F}$, обозначим $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ алгебру $\mathfrak{g}$, рассмотренную как алгебру над $\mathbb{K}$; $\mathfrak{g}^{\mathbb{L}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{L}$ – расширение скаляров $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{L}}$ нильпотентны/разрешимы одновременно. То же верно и для полупростоты, см. задачу 3.

(б) Обобщите теоремы Ли, Энгеля и критерии редуктивности, разрешимости и полупростоты на случай вещественной алгебры Ли.

Задача 5. Вычислите форму Киллинга для $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{su}(2)$ и найдите её сигнатуру в последних двух случаях.

Задача 6. (а) Покажите, что $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}), \mathfrak{u}(n)$ редуктивны и вычислите их центр.

(б) Покажите, что $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}), \mathfrak{su}(n), \mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$ полупросты.

Задача 7. Покажите, что в $\mathfrak{su}(2)$ нет элементов, действующих полупросто в присоединённом представлении.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Покажите, что $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ полупроста

Задача 2. Вычислите форму Киллинга на $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ и покажите, что она пропорциональна форме $tr_{\mathbb{C}^n}(xy)$.

Задача 3. (а) Покажите, что вещественная алгебра Ли полупроста $\Leftrightarrow$ её комплексификация полупроста. Покажите, что комплексная алгебра Ли полупроста $\Leftrightarrow$ она полупроста как вещественная алгебра Ли.

(б) Покажите, что $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ рассмотренная как вещественная алгебра Ли проста, но её комплексификация не проста.

Дополнительные задачи

Задача 4. Покажите, что на простой комплексной алгебре Ли любые две инвариантные формы пропорциональны.

Задача 5. (а) Вычислите сигнатуру формы $tr_V(xy)$ для $\mathfrak{u}(V)$.

(б) Пусть G – компактная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Покажите, что $\mathfrak{g}$ редуктивна, форма Киллинга неположительно определена на $\mathfrak{g}$ и отрицательно определена на полупростом факторе $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. *Воспользуйтесь тем, что любое представление компактной группы Ли унитаризуемо, и предыдущим пунктом.*

(в) Покажите, что если форма Киллинга на вещественной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ отрицательно определена, то $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли некторой компактной группы Ли. *Указание: рассмотрите образ при Ad какой-нибудь группы Ли G с алгеброй $\mathfrak{g}$.*

(г) Покажите, что если форма Киллинга вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ положительно определена, то $\mathfrak{g} = 0$. *Указание: покажите, что* $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{g})$ *– вложение и воспользуйтесь пунктом (б).*

Задача 6. Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли. *Коприсоединённое действие* $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^*$ задаётся как $(\mathrm{ad}^*_x \xi, y) + (\xi, \mathrm{ad}_x y) = 0 \ \forall x, y \in \mathfrak{g}, \xi \in \mathfrak{g}^*$. Постройте невырожденную инвариантную симметричную билинейную форму на $\mathfrak{g} \ltimes_{\mathrm{ad}^*} \mathfrak{g}^*$, где второй множитель – коммутативный идеал, действие $\mathfrak{g}$ на который – коприсоединённое.

Заметьте, что алгебра $\mathfrak{g} \ltimes_{\mathrm{ad}^*} \mathfrak{g}^*$ вообще не редуктивна.