Листок 2

Дедлайн: 10 Июня 2026, 23:59 МСК.

Комментарий: Каждая задача стоит 10 баллов.
Всюду полагаем, если не сказано обратное, что X – компактное кэлерово многообразие, причем $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.

1 Комплексная геометрия.

Определение: Пусть X – комплексное многообразие, а $L \to X$ – голоморфное векторное расслоение над X. Назовем **размерностью Кодаиры-Иитаки** следующее число:

$$\kappa(X, L) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{\log \dim H^0(X, mL)}{\log m}.$$

Эквивалентно, $\kappa(X, L)$ – это супремум рангов отображений

$$\Phi_m : X \to \mathbb{P}(H^)(X, mL).$$

Можно показать, что $\kappa(X, L) \in \{-\infty, 0, \dots, n\}$ (очевидно из второго определения).

Определение: Число $\mathrm{kod}(X) = \kappa(X, K_X)$ называется **Размерностью Кодаиры** многообразия X.

Определение: Численной размерностью голоморфного линейного расслоения $L \to X$ называется число

$$\mathrm{nd}(X, L) = \sup\left\{ m \,\middle|\, c_1^m(L) \neq 0 \text{ в } H^{m,m}(X) \right\}$$

Задача 1.1:

а Покажите эквивалентность двух определений размерности Кодаиры-Иитаки.

б Покажите, что существует $C > 1$

$$C^{-1} m^{\kappa(X,L)} \leqslant \dim H^0(X, mL) \leqslant C m^{\kappa(X,L)}.$$

в Покажите также, что для любого голоморфного линейного расслоения $L \to X$ выполнено неравенство

$$\kappa(X, L) \leqslant \mathrm{nd}(X, L).$$

Приведите пример, когда неравенство является строгим.

Задача 1.2: Хорошим источником к этой задаче является книга [1].

а Придумайте (или найдите в литературе) примеры многообразий с $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$ и наперед заданной размерностью Кодаиры (т.е. примеры комплексных поверхностей и многообразий с $\mathrm{kod}(X) = -\infty, 0, 1, 2$). У вас должно получиться 4 примера.

б Придумайте поверхность с объемным и численно эффективным, но не обильным K_X.

в* Попробуйте показать, что если на комплексной поверхности X (которую мы не предполагаем кэлеровой) есть голоморфное линейное расслоение $L \to X$, которое объемно и численно эффективно, то такая поверхность проективна.

Задача 1.3: Пусть X – компактное кэлерово многообразие с полуобильным (semiample) расслоением K_X. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

а $\mathrm{kod}(X) = 0$;

б $c_1(X) = 0$ в $H^2(X, \mathbb{R})$;

в Существует натуральное число m, что $mK_X \cong \mathcal{O}_X$.

Указание: Вспомните про теорему о разложении для компактных кэлеровых многообразий с $c_1(X) = 0$.

Задача 1.4: Пусть X – компактное кэлерово многообразие с полуобильным K_X и $0 < \mathrm{kod}(X) < n$. Примем без доказательства, что при больших m отображения $\Phi_m : X \to \mathbb{P}(H^0(X, mK_X))$ стабилизируются и задают отображение $\Phi : X \to Y$, где Y является нормальным (т.е. его особенности сосредоточены в собственном аналитическом подмножестве коразмерности 2).

а Примем без доказательства, что образ аналитического подмножества при голоморфном отображении является аналитическим подмножеством. Покажите, что существует собственное аналитическое подмножество $S \subset Y$, что ограничение отображения Φ

$$\Phi : X \setminus \Phi^{-1}(S) \to Y \setminus S$$

является голоморфной субмерсией.

б Пусть $\mathring{Y} = Y \setminus S$, а $\mathring{X} = X \setminus \Phi^{-1}(S)$. Покажите, что для всякого $y \in \mathring{Y}$ множество $X_y = \Phi^{-1}(y)$ является компактным комплексным подмногообразием комплексной размерности $n - \mathrm{kod}(X)$, и $c_1(X_y) = 0$.

2 Поток Риччи.

Всюду далее мы полагаем, что выполнено уравнение

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = -\operatorname{Ric}(\omega(t)) - \nu\omega(t) \\ \omega(0) = \omega_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Число ν является одним из чисел $\{-1, 0, 1\}$.

Если не сказано противное, то всюду далее полагаем $\Delta = \Delta_{\omega(t)}$, где $\omega(t)$ является решением уравнения 2.1.

Задача 2.1: Предположим, что $\nu = 0$. Следуя тому, что мы делали на лекциях, покажите, что уравнение 2.1 эквивалентно параболическом уравнению Монжа-Ампера:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = \log \frac{(\hat{\omega}_t + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi(t))^n}{\Omega} \\ \varphi(0) = 0 \\ \hat{\omega}_t + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi(t) > 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

для подходящих $\hat{\omega}_t$ и Ω.

Задача 2.2: Эта задача посвящена вычислениям в C^2-оценке для уравнения Монжа-Ампера и потока Риччи (см. лекции или [3, 4, 2, 5]).

а Пусть $\hat{\omega} = \sqrt{-1}\,\hat{g}_{j\overline{k}} dz^j \wedge d\overline{z}^k$ и $\omega = \sqrt{-1}\,g_{j\overline{k}} dz^j \wedge d\overline{z}^k$ – две кэлеровых метрики на многообразии X. Покажите, что

$$\Delta_\omega \operatorname{Tr}_{\hat{\omega}} \omega = \hat{R}_{j\overline{k}}{}^{a\overline{b}} g^{j\overline{k}} g_{a\overline{b}} - \hat{g}^{j\overline{k}} R_{j\overline{k}} + \hat{g}^{j\overline{k}} g^{a\overline{b}} g^{c\overline{d}} \hat{\nabla}_a g_{j\overline{d}} \hat{\nabla}_{\overline{b}} g_{c\overline{k}}.$$

Заметим, что обозначения геометрических величин крышечкой означают, что данная величина относится к метрике с крышечкой (т.е. к $\hat{\omega}$).

б Выведите, что

$$\Delta_\omega \log \operatorname{Tr}_{\hat{\omega}} \omega \geqslant -B \operatorname{Tr}_\omega \hat{\omega} - \operatorname{Tr}_{\hat{\omega}} \operatorname{Ric}(\omega),$$

где B определяется тензором кривизны метрики $\hat{\omega}$.

в Покажите, что для потока Риччи верно следующее неравенство

$$(\partial_t - \Delta) \log \operatorname{Tr}_{\omega_0} \omega(t) \leqslant B \operatorname{Tr}_{\omega(t)} \omega_0 - \nu$$

Задача 2.3: Эта задача посвящена различным оценкам для 2.1 и 2.2.

а Пусть $R(t)$ – скалярная кривизна метрики $\omega(t)$, являющейся решением уравнения 2.1. Вычислите $(\partial_t - \Delta)R(t)$ и покажите, что $R(t)$ ограничена снизу для всех t.

б Покажите, что если решение 2.1 (или 2.2) существует на интервале $[0;T]$, то $\varphi(t) \leqslant C_T$ и $\dot{\varphi}(t) \leqslant C_T$ на этом интервале.

в* Попробуйте вычислить $(\partial_t - \Delta)|\operatorname{Ric}(\omega(t))|^2_{\omega(t)}$.

Задача 2.4: Пусть X – компактное многообразие с $c_1(X) = 0$. Пусть ω_0 – произвольная кэлерова метрика на X. Поток Риччи 2.1 на X эквивалентен следующему параболическому уравнению Монжа-Ампера:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = \log \frac{(\omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi(t))^n}{\Omega} \\ \varphi(0) = 0 \\ \omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi(t) > 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\Omega = 0$ и $[\Omega] = [\omega_0^n]$.

Для всякой метрики $\omega \in [\omega_0]$ существует единственная функция, называемая потенциалом Риччи, $h \in C^\infty(X)$, что

$$\operatorname{Ric}(\omega) = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}h, \quad \text{и} \quad \int_X e^h\omega^n = \int_X \omega_0^n.$$

а Покажите, что для решения 2.3 выполняется следующее тождество:

$$\dot{\varphi} = -h(t),$$

где $h(t)$ – потенциал Риччи метрики $\omega(t) = \omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi(t)$.

б Введем функционал Мабучи $\mathcal{M}(\varphi)$ по следующей формуле:

$$\mathcal{M}(\varphi) = \int_X \log\frac{\omega_\varphi^n}{\omega_0^n}\omega_\varphi^n + \int_X h_0(\omega_0^n - \omega_\varphi^n).$$

Вычислите первую вариацию функционала $\mathcal{M}(\varphi)$ и производную $\dot{\mathcal{M}}(\varphi(t))$ вдоль 2.3.

в Вычислите вторую производную функционала Мабучи $\ddot{\mathcal{M}}(\varphi(t))$ вдоль 2.3. Считая известными C^0 и C^2 оценки для уравнения 2.3, покажите следующее неравенство

$$\ddot{\mathcal{M}}(\varphi(t)) \geqslant C\dot{\mathcal{M}}(\varphi(t))$$

г Покажите, что функционал

$$P(\varphi(t)) = \int_X \dot{\varphi}(t)\omega^n(t)$$

отличается на константу от $\mathcal{M}(\varphi(t))$ вдоль уравнения 2.3.

д Покажите, что $\mathcal{M}(\varphi(t))$ ограничен вдоль 2.3. Выведите из пункта (в), что $\dot{\mathcal{M}}(\varphi(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$. Покажите тогда, что $\omega_\infty = \omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi_\infty$ является риччи-плоской кэлеровой метрикой.

Список литературы

[1] Barth, W., Hulek, K., Peters, C., Van De Ven, A, *Compact complex surfaces,* Springer, 2003. (Cited on page 2.)

[2] Y.-T. Siu, *Lectures on Hermitian-Einstein metrics for stable bundles and Kähler-Einstein metrics,* https://people.math.harvard.edu/~siu/siu_reprints/dmv_book.pdf (Cited on page 3.)

[3] J. Song, B. Weinkove, *Lecture notes on the Kähler-Ricci flow*, arXiv:1212.3653 (Cited on page 3.)

[4] G.Szekelyhidi. *An introduction to Extremal Kähler Metrics*, Graduate Studies in Mathematics, 152. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014, MR3186384, Abl.1298.53002 (Cited on page 3.)

[5] V.Tosatti, *KAWA lecture notes on the Kähler-Ricci flow*, arXiv:1508.04823 (Cited on page 3.)