

ВШЭ, риманова геометрия. Листок 6.
Подмногообразия. Ковариантная производная тензоров.
Гессиан. 13.03.2025.

Задача 1. Доказать, что для n -мерной сферы $\mathbb{S}_r^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r тензор Римана можно найти по формуле $R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2}(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)$, а секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \frac{1}{r^2}$.

Задача 2. Для связности в касательном расслоении доказать следующие тождества:

- первое тождество Бианки $dT^i = -T^j \wedge \Gamma_j^i + e^j \wedge F_j^i$,
- второе тождество Бианки $dF_i^j = \Gamma_i^k \wedge F_k^j - F_i^k \wedge \Gamma_k^j$,

где e^i дуальный базис к выбранному базису e_i в векторных полях, Γ_j^i локальная 1-форма связности,

$$F_i^j = R_{kl,i}^j e^k \otimes e^l = \sum_{k < l} R_{kl,i}^j e^k \wedge e^l$$

локальная 2-форма кривизны, а T^i локальные 2-формы кручения,

$$T^k = T_{ij}^k e^i \otimes e^j = \sum_{i < j} T_{ij}^k e^i \wedge e^j.$$

Задача 3. Доказать, что для симметричной связности ∇ имеет место тождество Бианки $(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) = 0$, где X, Y, Z и V векторные поля. В компонентах это тождество имеет вид

$$\nabla_m R_{ij,k}^l + \nabla_i R_{jm,k}^l + \nabla_j R_{mi,k}^l = 0 \quad \text{или} \quad R_{ij,k;m}^l + R_{jm,k;i}^l + R_{mi,k;j}^l = 0.$$

Задача 4. Пусть g риманова метрика на многообразии M , по которой строится связность Леви-Чивита, а X — векторное поле. Выразить производную Ли $L_X g$ через ковариантные производные.

Задача 5. Векторное поле X на римановом многообразии называется полем Киллинга, если оно сохраняет метрику g , то есть если $L_X g = 0$. Выразите это условие через связность Леви-Чивиты.

Задача 6. Опишите киллинговы векторные поля на сфере со стандартной метрикой.

Задача 7. Доказать, что а) $\text{Hess} f(X, Y) = X(\tilde{Y} f) - df(\nabla_X \tilde{Y})$, б) гессиан на римановом многообразии является симметрической билинейной формой, в) явная формула в локальных координатах имеет вид

$$\text{Hess} f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) dx^i \otimes dx^j,$$

г) верна формула $\text{Hess} f(X, Y) = (\nabla_X \text{grad} f, Y)$, д) верна формула (позволяющая ввести гессиан, не используя связность) $\text{Hess} = \frac{1}{2} L_{\text{grad} f} g$, то есть гессиан — половина производной Ли метрики вдоль градиента функции.