

ВШЭ, риманова геометрия. Листок 13.

Минимальные подмногообразия-III. Гармонические отображения-II. 29.05.2025.

Задача 1. Пусть $e_1, \dots, e_n$ локальный ортонормированный базис в векторных полях в некоторой окрестности точки p многообразия M , а $c_1(t), \dots, c_n(t)$ — такие геодезические, что $c_i(0) = p$ и $c'_i(0) = e_i$. Доказать, что оператор Лапласа-Бельтрами можно найти по формуле

$$\Delta f(p) = - \sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} f(c_i(t))|_{t=0}.$$

Задача 2*. Доказать, что поверхность Эннепера

$$f(s, t) = \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6} + \frac{st^2}{2}, -\frac{t}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{s^2t}{2}, \frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right)$$

является минимальной поверхностью в $\mathbb{R}^3$.

Задача 3. Пусть (M, g) риманово многообразие, $(\mathbb{S}^n, g_{can})$ сфера со стандартной метрикой и $\Phi = (u_1, \dots, u_{n+1}) : M \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ гладкое отображение. Доказать, что отображение Φ является гармоническим тогда и только тогда, когда выполнено уравнение $\Delta_g \Phi = |\nabla \Phi|_g^2 \Phi$. Здесь равенство понимается покомпонентно, то есть для любого i выполнено $\Delta_g u_i = |\nabla \Phi|_g^2 u_i$, где $|\nabla \Phi|_g^2 = \sum_{i=1}^{n+1} |du_i|_g^2$.

Задача 4. Пусть $u_1, \dots, u_{n+1}$ такие собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами Δ_g на римановом многообразии (M, g) с одним и тем же собственным числом λ , что $\sum_{i=1}^{n+1} u_i^2 = 1$. Тогда отображение, определённое формулой $\Phi = (u_1, \dots, u_{n+1}) : M \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, является гармоническим отображением в сферу радиуса 1, причём с постоянной плотностью энергии $e(\Phi) = \frac{1}{2} |\nabla \Phi|_g^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} |du_i|_g^2 = \frac{\lambda}{2}$.

Задача 5. Пусть $\Phi = (u_1, \dots, u_{n+1}) : M \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ гармоническое отображение риманова многообразия (M, g) в сферу радиуса 1 с постоянной плотностью энергии $e(\Phi)$. Тогда все функции u_i являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами Δ_g на (M, g) с одним и тем же собственным числом $\lambda = 2e(\Phi)$.

Задача 6. Доказать, что для изометрических погружений минимальность эквивалентна гармоничности.

Задача 7. Докажите формулу Бохнера: если u гладкая функция на римановом многообразии, то

$$\Delta \left(\frac{|\text{grad} u|^2}{2} \right) = \langle \text{grad} \Delta u, \text{grad} u \rangle + |\text{Hess} u|^2 + \text{Ric}(\text{grad} u, \text{grad} u).$$

Задача 8. Докажите, что отображение Веронезе $\mathbb{S}_{\sqrt{3}}^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^4$, заданное формулой

$$\Psi(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}xy, \frac{1}{\sqrt{3}}xz, \frac{1}{\sqrt{3}}yz, \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2), \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2) \right),$$

является минимальным погружением.