Листок 6, 24 марта 2025 г.

Задача 1. Пусть линейное отображение конечномерных векторных пространств $f\colon V \to W$ в некоторых базисах V и W задается матрицей A. Какой матрицей задается отображение $f^*\colon W^* \to V^*$ в двойственных базисах V^* и W^*?

Задача 2. Пусть V_i – модули над коммутативным кольцом A. Докажите, что

1. $V \otimes A \simeq V$,
2. $V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1$,
3. $V_1 \otimes (V_2 \oplus V_3) \simeq (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_1 \otimes V_3)$,
4. $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \simeq V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$,

Задача 3. Пусть V_i – свободные модули конечного ранга над коммутативным кольцом A. Докажите, что

1. $\mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2^*, V_3) \simeq \mathrm{Hom}(V_1, V_3 \otimes V_2)$,
2. $(V_1 \otimes V_2)^* \simeq V_1^* \otimes V_2^*$.

Задача 4. Докажите, что $\mathrm{Hom}(V_1, \mathrm{Hom}(V_2, V_3)) \simeq \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, V_3)$.

Задача 5. *Решеткой* M в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ называется дискретная (т. е. такая, что в проколотой окрестности нуля нет точек) подгруппа по сложению. Докажите, что решетка в (конечномерном) векторном пространстве V порождена конечным числом элементов и изоморфна $\mathbb{Z}^r$, причем $r \leqslant \dim X$. В этом случае число r называют *рангом* решетки M. Если $r = n$, то M называется решеткой *полного ранга.*

Задача 6. Зададим отображение решеток полного ранга в V в решетки полного ранга в V^* по правилу $M \mapsto M^\vee$, где

$$M^\vee = \{\, f \in V^* \mid \forall m \in M\ f(m) \in \mathbb{Z} \,\}.$$

1. Докажите, что $(M^\vee)^\vee = M$.
2. Если $M_1 \subset M_2$, то $M_2^\vee \subset M_1^\vee$, и $M_1/M_2 \simeq M_2^\vee/M_1^\vee$. Порядок абелевой группы M_1/M_2 называется *индексом* подрешетки M_1 в решетке M_2.

Задача 7. Пусть A и B – коммутативные кольца. Докажите, что кольцо $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ является копроизведением A и B в категории коммутативных колец.

Задача 8. Вычислите $(\mathbb{Z}/n)^*$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m)$, $\mathbb{Z}/n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m$.

Задача 9. Докажите, что если характеристика поля $\mathbb{K}$ не равна двум, то симметрическая билинейная форма $g\colon V \times V \to \mathbb{K}$ однозначно определяется квадратичной формой $q(v) = g(v, v)$.

Задача 10. Опишите действие группы $\mathrm{GL}(V)$ на множестве билинейных симметрических форм на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{C}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{F}_q$.