

Семинар 8 (10 апреля). Системы корней.

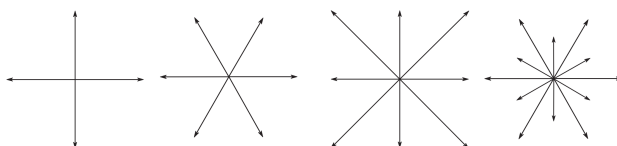
Задача 1. Опишите подалгебру Картана, корневое разложение, корневые $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$, найдите углы между корнями для алгебр Ли (а) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, (б) $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$.

Определение 1. Абстрактной приведённой системой корней называется конечное подмножество R в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, удовлетворяющее аксиомам:

- (R1) R линейно порождает $\mathbb{R}^n$,
- (R2) Для всяких корней $\alpha, \beta \in R$ число $n_{\beta, \alpha} := \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ – целое,
- (R3) Для всякого $\alpha \in R$ отражение $s_\alpha: \lambda \mapsto \lambda - \frac{2(\alpha, \lambda)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ переводит R в себя,
- (R4) Если $\alpha, c\alpha \in R$, то $c = \pm 1$.

Здесь $(\cdot, \cdot)$ означает стандартное евклидово скалярное произведение. Размерность n называется рангом R . *Изоморфизмом* систем корней называется изоморфизм $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.ч. $\phi(R_1) = R_2$ и $n_{\phi(\alpha), \phi(\beta)} = n_{\alpha, \beta}$.

Задача 2. (а) Классифицируйте все системы корней ранга 2. *Ответ:*



(б) Для произвольной системы корней R покажите, что если $\alpha, \beta \in R$ и $(\alpha, \beta) < 0$, то $\alpha + \beta \in R$

Определение 2. Пусть $t \in \mathbb{R}^n$ таков, что $(t, \alpha) \neq 0$ для всех $\alpha \in R$. Определим *положительные корни* $R_+ = \{\alpha \in R \mid (t, \alpha) > 0\}$, аналогично отрицательные корни $R_- = \{\alpha \in R \mid (t, \alpha) < 0\}$. Такое разложение $R = R_+ \sqcup R_-$ называется *поляризацией*.

Определение 3. Корень $\alpha \in R_+$ называется *простым*, если он не может быть представлен как сумма положительных корней. Множество простых корней обозначается $\Pi \subset R_+$.

Заметим, что множество простых корней зависит от поляризации.

Задача 3. (а) Выберите какую-нибудь поляризацию для корней $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ и выпишите для неё простые корни. (б) То же для $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$.

Задача 4. (а) Покажите, что любой положительный корень представляется в виде суммы простых,

(б) Покажите, что если α, β – простые, то $(\alpha, \beta) \leq 0$,

(в) Покажите, что простые корни образуют базис $\mathbb{R}^n$. Следовательно, любой корень представляется как $\sum_{\alpha_i \in \Pi} c_i \alpha_i$, причём $c_i \geq 0$ если $\alpha \in R_+$, $c_i \leq 0$ если $\alpha \in R_-$.

Определение 4. *Группой Вейля* системы корней называется группа, порождённая отражениями $s_\alpha, \alpha \in R$. Обозначается W .

Задача 5. Найдите группу Вейля для систем корней алгебр $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$

Когда-нибудь будет доказана следующая теорема:

Теорема. (1) Любые два набора простых корней для R отличаются действием некоторого $w \in W: \Pi' = w\Pi$.

(2) W порождается отражениями в простых корнях. Система корней R восстанавливается по своим простым корням: $R = W \cdot \Pi$.

Поэтому классификация систем корней сводится к классификации наборов простых корней. Простые корни кодируются *матрицей Картана*:

$$A = [a_{ij}], a_{ij} = n_{\alpha_j, \alpha_i} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}.$$

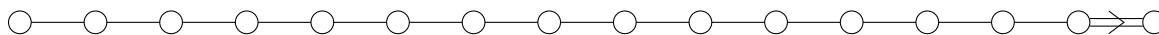
Она удовлетворяет свойствам:

- (1) $a_{ii} = 2$,
- (2) $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, причём $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$,
- (3) Для $i \neq j$, $a_{ij}a_{ji} = 4 \cos^2(\varphi_{ij})$, где φ_{ij} – угол между α_i, α_j .
- (4) Если $\varphi_{ij} \neq 0$, то $\frac{a_{ji}}{a_{ij}} = \frac{|\alpha_i|^2}{|\alpha_j|^2}$.

Эти данные можно закодировать *диаграммой Дынкина*:

- (1) Каждому простому корню соответствует вершина,
- (2) Количество рёбер между вершинами i, j равно $a_{ij}a_{ji}$,
- (3) Если два корня не ортогональны и имеют разную длину, то на ребре между ними ставится стрелочка по направлению от длинного к короткому.

Задача 6. Найдите матрицу Картана и диаграмму Дынкина для $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$.



Задачи для самостоятельного решения

- Задача 1.** Для алгебры Ли $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$: (а) Опишите подалгебру Картана, корневое разложение, корневые $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$, найдите углы между корнями,
- (б) Найдите группу Вейля и её действие на корнях,
- (в) Найдите матрицу Картана и нарисуйте диаграмму Дынкина.

Дополнительные задачи

Задача 2. Цель задачи – классифицировать все системы корней, диаграмма Дынкина D которых связна и не имеет кратных рёбер. Поскольку в этом случае все корни одинаковой длины, их можно нормировать так, что $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$.

(а) Покажите, что любая подматрица матрицы Картана вида $[a_{ij}]_{i,j \in J}$ – положительно определена, в частности, соответствующая форма не имеет ядра

- (б) Покажите, что D не имеет циклов,
- (в) Покажите, что из любой вершины D выходит не более трёх ребер,
- (г) Покажите, что в D не может быть двух вершин валентности более, чем 2,

Указание: в пунктах (б) – (г) покажите, что в противном случае некоторая подматрица матрицы Картана имеет ядро.

(д) Покажите, что длины "веток" в диаграмме с трёхвалентной вершиной могут быть только $(2, 2, n)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$.

Указание: в обозначениях как на картинке рассмотрите $\beta = \sum i\beta_i$ и аналогичные γ, δ . Покажите, что $\left(\alpha, \frac{\beta}{|\beta|}\right)^2 + \left(\alpha, \frac{\gamma}{|\gamma|}\right)^2 + \left(\alpha, \frac{\delta}{|\delta|}\right)^2 < |\alpha|^2$ и сделайте вывод.

