Листок 1

Задача 1.1. Пусть $A \subset B$ — множества, A счётно, а B несчётно. Докажите, что $|B \setminus A| = |B|$.

Задача 1.2. Элемент x вполне упорядоченного множества X будем называть предельным, если существует множество $A \subset X$, не содержащее x, с $\sup A = x$. Приведите пример счётного вполне упорядоченного множества, содержащего бесконечно много предельных элементов.

Задача 1.3. Пусть a_n — возрастающая последовательность вещественных чисел и $a_n = O(1)$. Докажите, что a_n сходится.

Задача 1.4. Сходятся ли последовательности?

а)

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

б)

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

в)

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^{1.5}} + \ldots + \frac{1}{n^{1.5}}$$

Задача 1.5. Вычислите

а)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2025}}{n^{2025} + n^{2023} - n^{2022}}$$

б)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$$

в)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

г*)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

Задача 1.6. а) Найдите предел последовательности $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

б) При $k \in \mathbb{N}$ найдите предел последовательности $n^{1-1/k}(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n})$

в) Докажите, что последовательность

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

сходится.

Задача 1.7.

а) Докажите, что если

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A,$$

то

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = A.$$

б) Верно ли обратное?

Задача 1.8. Пусть n — натуральное число, $x \geq -1$.

а) Докажите, что $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

б) Докажите, что $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$ при $x \geq 0$ и при $x < 0$ выполнено обратное неравенство.

Задача 1.9.

а) Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена. Её предел обозначается e.

б*) Докажите, что $x_{n+1} = x_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ и заключите, что $x_n = e + O\left(\frac{1}{n}\right)$.