

ВШЭ, риманова геометрия. Листок 12.
Минимальные подмногообразия-II. Гармонические отображения. 22.05.2025.

Задача 1. Пусть $e_1, \dots, e_n$ локальный ортонормированный базис в векторных полях в некоторой окрестности точки p многообразия M , а $c_1(t), \dots, c_n(t)$ — такие геодезические, что $c_i(0) = p$ и $c'_i(0) = e_i$. Доказать, что оператор Лапласа-Бельтрами можно найти по формуле

$$\Delta f(p) = - \sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} f(c_i(t))|_{t=0}.$$

Задача 2*. Доказать, что поверхность Эннепера

$$f(s, t) = \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6} + \frac{st^2}{2}, -\frac{t}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{s^2t}{2}, \frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right)$$

является минимальной поверхностью в $\mathbb{R}^3$.

Задача 3. Доказать, что для изометрических погружений минимальность эквивалентна гармоничности.

Задача 4. Назовём функцию обобщённо линейной, если её гессиан нулевой. Доказать, что если M — минимальное подмногообразие N , а f — обобщённая линейная функция на N , то её ограничение $f|_M$ является гармонической функцией.

Задача 5. Докажите формулу Бохнера: если u гладкая функция на римановом многообразии, то

$$\Delta \left(\frac{|\text{grad} u|^2}{2} \right) = \langle \text{grad} \Delta u, \text{grad} u \rangle + |\text{Hess} u|^2 + \text{Ric}(\text{grad} u, \text{grad} u).$$

Задача 6. Пусть N риманово многообразие. Доказать, что свойство отображения $f : \Sigma \rightarrow N$ римановой поверхности быть гармоническим зависит от конформной структуры, но не от выбора конформной метрики.

Задача 7. Пусть $P(d)$ пространство однородных многочленов степени d на $\mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим пространство гармонических однородных многочленов степени d

$$H(d) = \{f \in P(d) \mid \Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f = 0\}$$

и пространство сферических гармонических функций степени d на сфере радиуса R

$$SH(d) = \{f|_{\mathbb{S}_R^n} \mid f \in H(d)\}.$$

Докажите, что

$$\Delta^{\mathbb{S}_R^n} f = \frac{d(n+d-1)}{R^2} f.$$

Задача 8. Докажите, что отображение Веронезе $\mathbb{S}_{\sqrt{3}}^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^4$, заданное формулой

$$\Psi(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}xy, \frac{1}{\sqrt{3}}xz, \frac{1}{\sqrt{3}}yz, \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2), \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2) \right),$$

является минимальным погружением.