Листок 8

Задача 8.1. Пусть f — непрерывная монотонная функция на отрезке $[a, b]$. Докажите, что
$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + O(|f(a)| + |f(b)|).$$

Задача 8.2. Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$. Докажите, что
$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt - \{b\}f(b) + \{a\}f(a) + \int_a^b f'(t)\{t\}dt.$$

Задача 8.3. а) Пусть $a \in \mathbb{R}$ и непрерывные функции f, g таковы, что $\int_a^x f(t)dt = O(1)$ при $x > a$, а g монотонна и $g(x) = o(1)$ при $x \to +\infty$. Докажите, что существует предел
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)g(t)dt.$$
Он обозначается $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$.

б) Найдите интегральные формулы для
$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$
и
$$c = \lim_{n\to+\infty} (\ln n! - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n).$$

Задача 8.4. Для каких комплексных s сходится ряд
$$1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \ldots?$$

Задача 8.5. Докажите, что функция e^{-1/x^2} бесконечно дифференцируема и найдите её ряд Тейлора в $x = 0$.

Задача 8.6.

а) Докажите, что для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ и отрезка $J \subset I$ существует гладкая функция $f(x)$ такая, что $f(x) = 0$ при $x \notin I$ и $f(x) = 1$ при $x \in J$.

б) Докажите, что для любой последовательности вещественных чисел $a_0, a_1, \ldots$ существует гладкая функция f на $\mathbb{R}$ такая, что её ряд Тейлора в $x = 0$ имеет вид
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

Задача 8.7. Пусть $E(x) = 0! + 1!x + 2!x^2 + \ldots$ — формальный степенной ряд. Найдите дифференциальное уравнение для $E(x)$ (то есть какое-нибудь несложное соотношение между $E(x)$ и $E'(x)$) и предъявите гладкую функцию на $(0, +\infty)$ с таким асимптотическим разложением в нуле.

Задача 8.8.

а) Пусть $f(x)$ — многочлен. Докажите *тождество Эрмита*

$$e^x \int_0^x f(t)e^{-t}dt = F(0)e^x - F(x),$$

где

$$F(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} f^{(j)}(x).$$

б) Пусть n — натуральное число, а $p > n$ — простое. Положим $f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p \dots (x-n)^p}{(p-1)!}$. Докажите, что $F(k)$ — целое число при $0 \le k \le n$, причём $F(0)$ не делится на p, а все остальные значения делятся на p.

в*) Пусть $c_0, \dots, c_k$ — целые числа, $c_0 \neq 0$, причем $c_0 + c_1 e + \dots + c_k e^k = 0$. Рассмотрите $c_0 F(0) + \dots + c_k F(k)$ и заключите, что e — трансцендентное число.