

Топология — 3
Задачи к лекции 10:
Препятствия и классы Штифеля-Уитни
11 апреля 2024

Задача 1. Докажите, что у оветствления комплексного векторного расслоения все нечётные классы Штифеля-Уитни нулевые.

Задача 2. Пусть $E \rightarrow X$ — вещественное векторное расслоение.

а) Покажите, что значение $w_1(E)$ на петле $\gamma : [0; 1] \rightarrow X$ равно 1 если и только если γ *меняет ориентацию* в слое E , т. е. расслоение γ^*E над S^1 нетривиально.

б) Покажите, что $w_1(E) = 0$ если и только если ограничение E на $\text{sk}^1(E)$ тривиально.

Задача 3. Докажите, что для любого k существует векторное расслоение с ненулевым w_k . Выведите, что все классы Штифеля-Уитни тавтологического расслоения над $BO(n)$ ненулевые.

Задача 4. Докажите, что на S^n существует всюду ненулевое векторное поле если и только если n нечётно. Постройте такое векторное поле явно.

Задача 5. Докажите, что не существует погружения¹ $\mathbb{R}P^{16} \rightarrow \mathbb{R}^{30}$.

Задача 6. а) Пусть для расслоений E_1, E_2 над компактной базой существует такое E' , что $E_1 \oplus E' \simeq E_2 \oplus E'$. Докажите, что E_1 и E_2 стабильно изоморфны.

б*) Верно ли то же над произвольной базой?

¹Погружением называется гладкое отображение с невырожденным дифференциалом.