Топология — 3
Задачи к лекции 5: Препятствия и расслоения
7 марта 2024

Задача 1. Покажите, что у расслоения со стягиваемым слоем всегда есть сечение.

Задача 2. Дано S^1-расслоение $p : E \to S^2$. Пусть гомоморфизм $\mathbb{Z} \simeq \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ из точной последовательности пары является умножением на k. Докажите, что препятствие к построению сечения p равно $k \in \mathbb{Z} \simeq H^2(S^2; \pi_1(S^1))$.

Задача 3. Пусть расслоение $E \to X$ со слоем F гомотопически простое (т. е. действие $\pi_1(X)$ на всех $\pi_k(F)$ тривиально[1]). Покажите, что для любого $f : X' \to X$ обратный образ $f^*(E) \to X'$ также гомотопически прост.

Задача 4. Сколько существует различных с точностью до гомотопии отображений

а) $\mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{RP}^\infty$; **б)** $\mathbb{RP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$; **в)** $\mathbb{RP}^\infty \to S^1 \times S^1$?

Задача 5. Опишите множество $[S^1 \times S^1, X]$ для **а)** $X = \mathbb{RP}^2$; **б)** $X = S^1 \vee S^1 \vee S^2$.

Задача 6. Докажите, что сложение на $H^n(X; G)$ совпадает со сложением на гомотопических классах отображений $[X, K(G, n)] = [X, \Omega K(G, n + 1)]$

Задача 7. Рассмотрим отображение $K(G_1, m) \wedge K(G_2, n) \to K(G_1 \otimes G_2, m + n)$. Оно определяет гомоморфизм $H^m(X; G_1) \otimes H^n(Y; G_2) \to H^{m+n}(X \wedge Y; G_1 \otimes G_2)$. Докажите, что он совпадает с внешним произведением.

[1] Для корректности этого определения нужно потребовать, чтобы действие $\pi_1(F)$ на $\pi_k(F)$ также было тривиальным.