Топология – 3

Задачи к лекции 1:
Когомологии и произведения

8 февраля 2024

Задача 0. Опишите кольцо $(H^0(X;\mathbb{Z}),\smile)$, где X — *любое* топологическое пространство. Приведите пример, когда $H^0(X;\mathbb{Z})\otimes H^0(Y;\mathbb{Z})\to H^0(X\times Y;\mathbb{Z})$ — не изоморфизм.

Задача 1. Найдите функцию $q:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ такую, что

$$q(m)-q(m+n)+q(n)=mn.$$

Выведите, что $x\smile x=0$ для всех $x\in H^1(X;\mathbb{Z})$. Верно ли это над другими кольцами?

Задача 2. Вычислите кольца $H^*(X;\mathbb{Z})$ и $H^*(X;\mathbb{Z}/2)$ через "симплициальные" когомологии.
а) $X=\mathbb{RP}^2$; **б)** X — бутылка Клейна.

Задача 3. *(Ассоциативность $\smile$)* Докажите, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
C_*(X\times Y\times Z) \arrow[r, "AW"] \arrow[d, "AW"] & C_*(X)\otimes C_*(Y\times Z) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes AW"] \\
C_*(X\times Y)\otimes C_*(Z) \arrow[r, "AW\otimes\mathrm{id}"] & C_*(X)\otimes C_*(Y)\otimes C_*(Z).
\end{tikzcd}$$

Задача 4. **а)** Докажите, что $f^*(a\smile b)=f^*(a)\smile f^*(b)$ и $f_*(x\frown f^*(b))=f_*(x)\frown b$.
б) Пусть $a\in C^*(X)$, $b\in C^*(Y)$. Докажите, что $a\times b=p_X^*(a)\smile p_Y^*(b)\in C^*(X\times Y)$.
в) Выведите, что $H^*(X)\otimes H^*(Y)\xrightarrow{\times}H^*(X\times Y)$ — гомоморфизм колец.

Задача 5. *(Приведённая формула Кюннета)* Опишите кольцо $\widetilde{H}^*(X\wedge Y;\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — поле, $X\wedge Y:=(X\times Y)/(X\vee Y)$ — смэш-произведение.

Задача 6. **а)** Пусть $x\in H_m(X;\mathbb{Z})$ — элемент порядка k и $y\in H_n(Y;\mathbb{Z})$ — элемент порядка ℓ.
Постройте элемент $z\in H_{m+n}(X\times Y;\mathbb{Z})$ такой, что НОД$(k,\ell)\cdot z=0$.
Постройте элемент $w\in H_{m+n+1}(X\times Y;\mathbb{Z})$ такой, что НОД$(k,\ell)\cdot w=0$.

б)* Докажите, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/\text{НОД}(k,\ell) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "1\mapsto w"] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[d, "(1,1)\mapsto(x,y)"] \\
H_{m+n+1}(X\times Y;\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_m(X;\mathbb{Z}),H_n(Y;\mathbb{Z})).
\end{tikzcd}$$

Задача 7. **а)*** *(cup-длина $\le$ LS-категория)* Пусть $X=U_1\cup\dots\cup U_n$ линейно связно, и все вложения $U_j\hookrightarrow X$ гомотопны отображению в точку. Докажите, что $a_1\smile\dots\smile a_n=0$ для любых $a_1,\dots,a_n\in\widetilde{H}^*(X)$. Выведите, что умножение в когомологиях надстройки тривиально. (Указание: используйте отображения $H^*(X,U_j)\to\widetilde{H}^*(X)$ и относительное $\smile$-умножение.)

б)* Сколько нужно несамопересекающихся дисков, чтобы покрыть двумерный тор?

Задача 8*. *(Суперкоммутативность $\smile$)* Пусть $r:\Delta^n\to\Delta^n$ — линейное отображение, которое переводит i-ую вершину в $(n-i)$-ую. Докажите, что $\rho:C_n(X)\to C_n(X)$, $\sigma\mapsto(-1)^{n(n+1)/2}\sigma\circ r$ — цепное отображение. Постройте цепную гомотопию между ρ и $\mathrm{id}_{C_*(X)}$.