

Топология – 1
Задачи к лекции 11:
Клеточные комплексы
18 апреля 2023

Задача 1. Задайте какое-нибудь клеточное разбиение

а) сферы S^n с двумя склеенными точками; б) $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$; в*) $SO(n)$.

Задача 2. а) Докажите, что клеточный комплекс компактен если и только если он конечен (т. е. состоит из конечного числа клеток).

б*) Докажите, что клеточный комплекс метризуем если и только если он локально конечен (т. е. любая точка лежит в замыкании конечного числа клеток).

в) Любой ли клеточный комплекс хаусдорфов?

Задача 3. Докажите, что условие связности клеточного комплекса X эквивалентно

а) условию связности $sk^1(X)$; б) условию линейной связности X .

Задача 4. Пусть X — клеточный комплекс, $A \subset X$ — подкомплекс, $f, f' : X \rightarrow Y$ — гомотопные отображения в произвольное топологическое пространство. Докажите¹, что $X \cup_f Y \approx X \cup_{f'} Y$.

Задача 5. Покажите, что если при построении клеточного комплекса заменить приклеивающие отображения границ клеток на гомотопные, то результат получится гомотопически эквивалентным исходному.

Задача 6. Докажите, что образ непрерывного отображения S^1 в клеточный комплекс может пересекать лишь конечное число (открытых) клеток.

Задача 7. а) Докажите, что связный клеточный комплекс гомотопически эквивалентен клеточному комплексу, имеющему лишь одну нульмерную клетку.

б*) Докажите, что односвязный клеточный комплекс гомотопически эквивалентен клеточному комплексу, имеющему лишь одну нульмерную клетку и не имеющему одномерных клеток.

в*) (Подсказка к предыдущему пункту.) Пусть $sk^1(X)$ гомеоморфен букету окружностей и $\varphi : D^2 \rightarrow X$ — клеточное отображение, переводящее ∂D^2 в одну из этих окружностей. Вложим D^2 в ∂D^3 как южное полушарие. Покажите, что $X \cup_\varphi D^3$ гомотопически эквивалентен X .

В то же время, можно стянуть северное полушарие D^3 и получить комплекс, имеющий на одну 1-клетку меньше.

¹Можно дополнительно потребовать, чтобы гомотопия была неподвижна на Y .