Топология – 1

Экстра листок № 7s

Пространства петель

14 марта 2023

Напомним, если дано пространство X и отмеченная точка x_0, пространство петель ΩX определяется как множество отображений $\gamma : [0;1] \to X$, таких что $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, снабжённое компактно-открытой топологией.

Задача 1. а) Покажите, что для метризуемого X пространство ΩX также метризуемо.

б) Покажите, что для компактного хаусдорфова X пространство ΩX также компактно.

Задача 2. а) Покажите, что операция *композиции петель* $m : \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$ непрерывна, но не ассоциативна и не имеет единичного элемента.

б) Покажите, что она *гомотопически ассоциативна*, имеет *гомотопическую единицу* и у каждой петли есть *гомотопически обратная*[1].

Задача 3. Введём пространство петель Мура:

$$\Omega^M X = \{(f, r) \mid f : [0; +\infty) \to X, r \geq 0, f(t) = f(r) \text{ для всех } t > r\}.$$

а) Определите на $\Omega^M X$ естественную непрерывную операцию умножения. **б)** Докажите, что она ассоциативна и **в)** имеет единицу.

Задача 4. а) Докажите, что для любого X тавтологическое вложение $\Omega X \to \Omega^M X$ является гомотопической эквивалентностью[2].

б) Проверьте, что оно сохраняет операцию умножения (уточнив, что это буквально значит).

Задача 5. Проверьте, что любое отображение $X \to Y$ индуцирует *гомоморфизмы* $\Omega X \to \Omega Y$ и $\Omega^M X \to \Omega^M Y$.

[1] Это означает, что определены точка $e \in \Omega X$ и отображение взятия обратного $i : \Omega X \to \Omega X$, такие что

- $m \circ (m \times \mathrm{Id}) \sim m \circ (\mathrm{Id} \times m) \ : \ \Omega X \times \Omega X \times \Omega X \to \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$;
- $m \circ (p_e \times \mathrm{Id}) \circ \Delta \sim m \circ (\mathrm{Id} \times p_e) \circ \Delta \sim \mathrm{Id} \ : \ \Omega X \to \Omega X \times \Omega X \to \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$;
- $m \circ (i \times \mathrm{Id}) \circ \Delta \sim m \circ (\mathrm{Id} \times i) \circ \Delta \sim p_e \ : \ \Omega X \to \Omega X \times \Omega X \to \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$.

Здесь $\Delta : \Omega X \to \Omega X \times \Omega X$ — диагональное вложение, $p_e : \Omega X \to e \in \Omega X$ — отображение в одну точку.

Если в этих условиях заменить гомотопность отображений на их равенство, получится определение *топологической группы.*

[2] *Указание:* для этого вложения существует деформационная ретракция. В доказательстве удобно сначала проретрагировать $\Omega^M X$ на вспомогательное подпространство $\{(f, r) \mid r \geq 1\}$