Топология трёхмерных многообразий

Задачи к лекциям 9 и 10: Хирургия циклов

27 апреля 2023

Задача 1. а) Докажите, что для замкнутого трёхмерного многообразия M любой класс $\alpha \in H^1(M;\mathbb{Z})$ реализуется вложенной поверхностью, нормальное расслоение к которой тривиально.

б) Пусть $\hat{\alpha} \in H^1(M;\mathbb{Z}_2)$ — редукция $\alpha \pmod 2$. Докажите, что $\hat{\alpha}^2 = 0$.

в) Покажите, что обратное неверно[1]: если квадрат класса с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ равен нулю, то он не обязательно является редукцией целочисленного класса $\pmod 2$.

Задача 2. Покажите, что любая поверхность в M, реализующая класс, двойственный к $w_1(M)$, ориентируема.

Задача 3. Выведите[2], что если $f : S \to M$ — погружение замкнутой поверхности в трёхмерное многообразие, имеющее

а) только особенности простого самопересечения;

б) только особенности простого и тройного самопересечения,

то для любого f', достаточно близкого к f в C^∞-топологии Уитни, f' имеет такие же особенности в достаточно близких точках.

Задача 4*. Докажите, что если фундаментальная группа замкнутого ориентируемого трёхмерного многообразия свободна, то оно гомеоморфно связной сумме нескольких копий $S^1 \times S^2$.

[1] Указание: рассмотрите линзовое пространство $L(4,1)$.

[2] Например, из теоремы о неявной функции.